PROF. DR. FRIEDRICH EISENBRAND
DR. KAI GEHRS

Übungsblatt 2

Organisatorisches:

Werfen Sie die schriftlichen Lösungen bis spätestens Freitag, den 02.11.07, 13 : 00 Uhr, in den dafür vorgesehenen orangenen Kasten auf der 1ten Etage des D-Gebäudes (neben dem Raum D1.348) ein:

Kasten Nr. 13	Übungsgruppen 1 – 3
Kasten Nr. 14	Übungsgruppen 4 – 6
Kasten Nr. 15	Übungsgruppen 7 – 9
Kasten Nr. 16	Übungsgruppen 10 – 14

Geben Sie bei jeder Abgabe neben Ihrem Namen und der Matrikelnummer auch die Übungsgruppe an. Schreiben Sie insbesondere Ihren Namen leserlich! Verspätete Abgaben, Abgaben die mehr als einen Namen tragen und Abgaben die sonstwie unvollständig oder unleserlich beschriftet sind, werden mit 0 Punkten.

Prüfen Sie auch in regelmäßigen Abständen, ob sich auf dem Online-Abgabetool OLEX neue Aufgaben befinden. Auch diese Aufgaben stehen nur in einer begrenzten Zeitspanne zur Bearbeitung zur Verfügung (der Link zum Tool findet sich auf der Webseite zur Vorlesung).

Aufgabe 5: (Abbildungen, 8 Punkte)
Seien A,B,C Mengen und $f : A \to B$ sowie $g : B \to C$ Abbildungen. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Sind f und g injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.

(b) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch g injektiv.

(c) Sind $B_1, B_2 \subseteq B$, so gilt $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

(d) Sind $A_1, A_2 \subseteq A$, so gilt $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

Aufgabe 6: (Ordnungen und Relationen, 5 Punkte)
Sei

$$\mathscr{Q} := \{(a,b) \mid a \in \mathbb{Z} \text{ und } b \in \mathbb{N}_+\}.$$

Auf $\mathscr{Q}$ definieren wir die Relation $\sim$ vermöge

$$(a,b) \sim (c,d) \text{ genau dann, wenn } ad = bc.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathscr{Q}$ definiert.

(b) Für $(m,n) \in \mathscr{Q}$, $m \neq 0$, bezeichne

$$[m:n]_\sim := \{(a,b) \mid (a,b) \in \mathscr{Q} \text{ mit } (m,n) \sim (a,b)\}$$

die Äquivalenzklasse von (m,n). Es sei

$$\mathscr{Q}_\sim := \{[p:q]_\sim \mid (p,q) \in \mathscr{Q}\}$$

Auf $\mathscr{Q}_\sim$ definieren wir die Relation $\preceq$ vermöge

$$[a:b]_\sim \preceq [c:d]_\sim \text{ genau dann, wenn } ad \leq bc,$$

wobei $\leq$ die übliche Ordnung auf den ganzen Zahlen bezeichnet. Zeigen Sie, dass $\preceq$ eine totale Ordnung auf $\mathscr{Q}_\sim$ ist.

Die Menge der Äquivalenzklassen $\mathscr{Q}_\sim$ bezeichnet man als die *Menge der rationalen Zahlen*, kurz $\mathbb{Q} := \mathscr{Q}_\sim$.

Aufgabe 7: (Induktion & Ordnung auf endlichen Mengen, 6 Punkte)

Beweisen Sie: Ist M eine endliche Menge und $\preceq$ eine partielle Ordnung auf M, so lässt sich $\preceq$ zu einer totalen Ordnung $\preceq_{\text{total}}$ auf M fortsetzen, d.h. $\preceq_{\text{total}}$ ist eine totale Ordnung auf M mit der Eigenschaft, dass aus $m \preceq m'$ stets $m \preceq_{\text{total}} m'$ folgt für alle $m, m' \in M$.