Möglichkeiten und Grenzen der Kategorie Geschlecht in der Mathematik – Zur Dialogizität in den mathematischen Texten Emmy Noethers

von Mechthild Koreuber und Henning Krause

Die Disziplin Mathematik hat sich gegenüber der Integration einer kritischen Reflexion in ihrer langen Geschichte zumeist als widerständig erwiesen, die feministische Theorie jedoch sich ebenso zaudernd gezeigt, in ihre wissenschaftskritischen Diskurse die Mathematik aufzunehmen. Wie können unter diesen Bedingungen die Wissenschaft Mathematik, vertreten durch einen Algebraiker, und die feministische Theorie, vertreten durch eine Mathematikhistorikerin, in einen Dialog treten, der über das Benennen von Standpunkten hinaus Denkrichtungen in Berührung bringt, Denkbewegungen auslöst? Könnte Wissenschaftsgeschichte sich als ein Bindeglied erweisen? Ausgangspunkt unserer gemeinsamen Arbeit, die über das hier publizierte Papier hinausgeht, sind mathematische Publikationen. In der Gegenüberstellung verschiedener Lesarten, mathematischer, wissenschaftshistorischer, wissenschafts- und erkenntnistheoretischer, entstehen neue Perspektiven auf den Text, die die Produktion von Mathematik als soziokulturellen Prozess sichtbar werden lassen.
Ausgehend von Texten der Mathematikerin Emmy Noether wollen wir über das Verhältnis von Mathematik, Mathematikgeschichte, Wissenschaftstheorie und Geschlechterforschung einen Versuch der Annäherung von wissenschaftlichem Mainstream und feministischer Theorie wagen. Welche Möglichkeiten eröffnet eine Lesart der mathematischen Texte Emmy Noethers, die mathematische Inhalte kontextualisiert, für Mathematik und für feministische Theorie?
Unser Beitrag beginnt mit einer knappen Darstellung der Biographie und der Person Noethers, wie sie sich in den Erinnerungen von Zeitzeugen widerspiegelt, und legt so den Grundstein für eine historische Zugangsweise zu ihren mathematischen Texten. Im nächsten Kapitel werden, ausgehend von einer ihrer berühmtesten Publikationen, der „Idealtheorie in Ringbereichen“, der Leserin und dem Leser zwei verschiedene Zugangsweisen und damit Analyse- und Interpretationsmöglichkeiten angeboten. Hier treffen eine mathematischen Analyse des Textes und, wenn auch nicht feministische Theorie, so doch wissenschaftshistorische und wissenschaftstheoretische Ansätze, die die Möglichkeit einer Bedeutung des Geschlechterverhältnisses für wissenschaftliche Entwicklung nicht ausblenden, aufeinander. In einem dritten Kapitel werden die beiden Perspektiven, nicht im ausgeschriebenen Dialog, doch als Ergebnis eines Dialoges miteinander verbunden mit dem

Ziel, die Bedeutung der Dialogizität in den Texten Noethers auszuloten. In einem Fazit werden mögliche Antworten auf die oben gestellten Fragen skizziert.

Emmy Noether – eine Annäherung

Prof. Dr. Emmy Noether, geb. 1882 in Erlangen, gest. 1935 in Bryn Mawr, Pennsylannia, Mathematikerin: ihre Biographie sei einfach, sagte ihr russischer Kollege und enger Freund Pawel Alexandroff 1935 in seiner Gedenkrede. Dieser Satz ist eine Provokation, wissen wir doch dank der Ergebnisse der Frauenforschung einiges über die Berufsverläufe von Frauen Anfang des vergangenen Jahrhunderts, über die Hürden und Hindernisse, die ihnen im Verlauf ihres Bemühens um Ausbildung und Berufstätigkeit als Wissenschaftlerinnen in den Weg gelegt wurden. Und doch ist dieser Satz Alexandroffs ernst zu nehmen, will er diese Schwierigkeiten in der Biographie Noethers, um die er sehr wohl wusste, nicht verschleiern, sondern vielmehr auf ihren allen Widerständen zum Trotz klaren Weg als Mathematikerin und ihre Hindernisse nur als etwas zu Überwindendes begreifende Persönlichkeit hinweisen. Noether selbst schrieb 1934 „I allways went my own way in education and research work" und gibt damit den Grundton ihrer Biographie an, die wir jetzt mit wenigen Worten und im Hinblick auf die oben formulierte Fragestellung skizzieren.
Emmy Noethers Vater Max Noether war Professor für Mathematik in Erlangen und sie wuchs gemeinsam mit ihren drei jüngeren Brüdern in einem jüdischen stark assimilierten, gutbürgerlichen Elternhaus auf. Wie viele Mädchen dieser Schicht besuchte sie zunächst die höhere Töchterschule und machte 1900 die Staatsprüfung für Lehrerinnen in Englisch und Französisch (vgl. Kaplan 1997). Zu dieser Zeit war die Entscheidung für eine Berufstätigkeit als Lehrerin bereits eine Entscheidung gegen die tradierte Frauenrolle, da sie sich auf Grund des Beamtinnenzölibats damit für Ehe- und Kinderlosigkeit entschieden. Doch Noethers berufliche Pläne gingen weiter. Sie beschloss, Mathematik zu studieren, hier vielleicht auch angestoßen durch den Studienbeginn ihres jüngeren Bruders Fritz, der sich ebenfalls für Mathematik entschied und dem sie sich vermutlich wenigstens ebenbürtig fühlte. Bereits in diesen frühen Jahren wird Emmy Noether mit dem Sprechen über Mathematik, der Begeisterung und Leidenschaft in der mündlichen Entwicklung mathematischer Probleme und Lösungen konfrontiert worden sein. Paul Gordan, ein Kollege ihres Vaters und ihr späterer Doktorvater, war ein enger Freund der Familie und berüchtigt dafür, mathematische Fragestellungen bis zur endgültigen Lösung verbal zu verfolgen und dann veröffentlichungsreif aufzuschreiben.
Noethers 1908 abgeschlossene Promotion stand in der Tradition der von

Gordan und von Max Noether vertretenen klassischen, auch als symbolisches Rechnen charakterisierten algebraischen Auffassungen und lag im Gebiet der Invariantentheorie. Mit dieser und den folgenden Arbeiten wurde Noether zu einer der führenden VertreterInnen dieser Fachrichtung und erregte die Aufmerksamkeit der Mathematiker Felix Klein und David Hilbert, die sie 1915 zur Unterstützung der eigenen Forschung im Bereich mathematischer Probleme der Relativitätstheorie nach Göttingen einluden. Bis dahin hatte Noether in Erlangen gearbeitet, ihren inzwischen häufig kränkelnden Vater in der Lehre vertreten und in seinem Namen mehrere Promotionen angeregt.

Für Noethers weitere fachliche Entwicklung war insbesondere die Berufung von Ernst Fischer als Nachfolger Gordans nach Erlangen von Bedeutung. Sie selbst schrieb 1919 in ihrem dem Habilitationsantrag beigefügten Lebenslauf: „Vor allem bin ich Herrn E. Fischer zu Dank verpflichtet, der mir den entscheidenden Anstoß zu der Beschäftigung mit abstrakter Algebra in arithmetischer Auffassung gab, was für alle meine späteren Arbeiten bestimmend blieb.“ *Begrifflich*, als Gegenpol zu dem symbolischen Rechnen Gordans zu verstehen, wird diese Auffassung Noethers genannt und von Bartel L. van der Waerden, einem ihrer Schüler, mit folgenden Worten charakterisiert: „Alle Beziehungen zwischen Zahlen, Funktionen und Operationen werden erst dann durchsichtig, verallgemeinerungsfähig und wirklich fruchtbar, wenn sie von ihren besonderen Objekten losgelöst und auf allgemeine begriffliche Zusammenhänge zurückgeführt sind.“ (van der Waerden 1935, S.469)

Wir werden im dritten Abschnitt darauf eingehen. Mit Fischer verband Noether eine enge gemeinsame Forschungstätigkeit, und zahlreiche Postkarten belegen die intensive Kommunikation zwischen beiden (vgl. Dick 1970). Die Postkarten sind als Fortsetzung von Gesprächen zu lesen, rein mathematischen Inhalts, Ideen, die im Anschluss an vorhergehende mündliche Überlegungen vielleicht auf einem gemeinsamen Fußweg nach einem Seminar entstanden und noch rasch die schriftlichen Niederlegung im Sinne der Fortführung des Gesprächs brauchten.

Noethers Habilitationsschrift „Invariante Variationsprobleme“, eingereicht 1918 in Göttingen, befasste sich ebenso wie die vorhergehenden Publikationen mit mathematischen Fragestellungen der Relativitätstheorie. Die Hauptsätze sind als Noether-Theoreme in die theoretische Physik eingegangen. Auf die Schwierigkeiten des 1915 begonnen Habilitationsverfahrens wird hier nicht weiter eingegangen (vgl. dazu Tollmien 1990). Es sei nur soviel angemerkt, dass diese Behinderungen einer beruflichen Entwicklung Noether nie davon abgehalten haben, Mathematik zu betreiben. Ähnliches gilt für familiäre Konflikte. So ist Noether nicht nach dem Tod ihrer Mutter nach Erlangen zurückgekehrt, um ihrem Vater den Haushalt zu führen, wie es das Bild einer Tochter aus gutem Hause erwarten lassen würde.

Mit der ersten gemeinsam mit einem Kollegen geschriebenen Arbeit begann 1920 Noethers Publikationstätigkeit im Bereich der Algebra. Es wird ihr zukünftiges Arbeitsgebiet, dessen Gestalt sich mit ihrer Tätigkeit als Forschende und Lehrende in erheblicher Weise verändern wird. Kommunikation stand am Anfang, das Ringen um die präzise Bestimmung von Begriffen im mündlichen Dialog und die Verschriftlichung zu einer gemeinsamen Publikation. Spuren dieses Prozesses lassen sich noch in der Veröffentlichung selbst finden, so wenn Noether/Schmeidler schrieben: „Wir sind damit auf einen fundamentalen Begriff geführt worden“ (Noether/Schmeidler 1920, S.327) und Noether in der darauf folgenden Arbeit diese Veröffentlichung reflektierte: „Die vorliegenden Untersuchungen stellen eine starke Verallgemeinerung und Weiterentwicklung der diesen beiden Arbeiten zugrundeliegenden Begriffsbildungen dar.“ (Noether 1921, S.28) Bettina Heintz hat in ihrem Buch „Die Innenwelt der Mathematik – Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin“ Kommunikation als einen zentralen Aspekt des mathematischen Forschungsprozesses herausgearbeitet (vgl. Heintz 2000, S.209ff). Allerdings findet sie selten ihren Niederschlag in gemeinsamen Publikationen. Das gilt für die 20er Jahre des vergangenen Jahrhunderts noch mehr als heutzutage. Noether ist hier mit mehreren gemeinsamen Publikationen sehr ungewöhnlich.
1921 mit 39 Jahren veröffentlichte Noether „Idealtheorie in Ringbereichen“. In dieser außergewöhnlichen Arbeit zeigt sich ihr begrifflicher oder, wie man später sagen wird, struktureller Zugang und ihre Abwendung vom symbolischen Rechnen in voller Deutlichkeit. Damit ist sie aus Sicht der mathematischen Gemeinschaft endgültig aus dem Schatten der großen Namen Gordan, Max Noether, Klein und Hilbert herausgetreten, auch wenn die von ihr vertretenen Auffassungen und Methoden von den wenigsten ihrer Kollegen geteilt werden. Auf diesen Text werden wir im Folgenden genauer eingehen und ihn zur Grundlage unserer Überlegungen über die Dialogizität der Texte Noethers nehmen.
1922 erhielt Noether den Titel „Außerordentlicher nichtbeamteter Professor“, der nicht mit Einkünften verbunden war. 1923 wurde ihr der halbjährlich zu erneuernde Lehrauftrag für Algebra erteilt. Sie lebte von dieser Vergütung und einen kleinen Vermögen in sehr bescheidenen Verhältnissen. Ab etwa 1923 gründete sich um Noether eine Schule, die unter dem Namen Noether-Schule in die mathematische Geschichtsschreibung eingegangen ist (vgl. Koreuber 2001). Zunächst ihre eigenen Doktoranden, später Postgraduierte und Kollegen aus dem Inland und Ausland besuchten ihre Seminare und Vorlesungen. Noether hatte die Möglichkeit und Freiheit, im Rahmen ihres Lehrauftrages ihren aktuellen Forschungsfragen nachzugehen. Das gestaltete ihre Veranstaltungen, die als sehr schwer galten und wohl für Außenstehende eher chaotisch und verwirrend waren. Sie trug selten fertige Theorien vor,

sondern, so wirkte es auf den kleinen Kreis ihrer Hörerinnen und Hörer, schien diese erst an Ort und Stelle, gewissermaßen im Dialog mit ihren Studierenden zu entwickeln. Damit aber wurden ihre Studentinnen und Studenten Beteiligte am Forschungsprozess, und es handelte sich eher um Diskussionskreise denn um eine Vorlesung. In Noethers Veranstaltungen geschah Mathematik, und die Spannung und Schönheit des Entstehens konnte sie ihrer kleinen, äußerst engagierten Hörerschar in hohem Maße vermitteln oder, wie eine ihrer Schülerinnen formulierte: „The strange phenomena, as I look back on it, was that from our point of view, she was one of us, almost as it she too was thinking about the theorem for the first time." (McKee 1983, S.139) Legendär sind ihre langen Spaziergänge mit Kollegen, Schülerinnen und Schülern, auf denen über mathematische Fragen und Probleme diskutiert wurde. Viele Briefe sind sicherlich im Anschluss daran gewechselt worden. Erhalten geblieben sind im wesentlichen die Briefe Noethers an ihren Kollegen Helmut Hasse, die in eindrucksvoller Weise zeigen, dass die Übergänge vom Sprechen zum Schreiben und zum Publizieren für Noether fließend waren. So zeigt sich insgesamt, dass ihr persönliches Auftreten, ihre Begeisterung für Mathematik, ihre Lust, jederzeit, sei es im Seminar, auf langen Spaziergängen oder in der Göttinger Badeanstalt über mathematische Themen zu diskutieren, die Fähigkeit, anderen Menschen zuzuhören, sie zu inspirieren und ihre mathematische Entwicklung zu fördern, wesentliche Momente im Verständnis der Wirkung Emmy Noethers und der Noether-Schule sind.

1932 erhiet Noether für ihre Beiträge zur Algebra gemeinsam mit Emil Artin den Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis und erfuhr damit nationale Anerkennung. Wichtiger aber ist im gleichen Jahr die große internationale Anerkennung ihrer Arbeit und ihres methodischen Konzeptes durch die Einladung, einen der Hauptvorträge auf dem Internationalen Mathematikerkongress in Zürich zu halten. Am 25. April 1933 wurde Emmy Noether aufgrund des „Gesetzes zur Wiederherstellung des Berufsbeamtentums" beurlaubt und im Herbst 1933 entlassen. Verschiedene Versuche ihrer Kollegen, sie zu unterstützen ergaben eine einjährige, verlängerbare Gastprofessur am Frauencollege in Bryn Mawr, finanziert durch die Rockefeller Foundation, und so emigrierte Noether bereits im Oktober 1933 in die USA. Am 4. April 1935 verstarb Emmy Noether unerwartet an den Folgen einer Operation.

Zwei Linien sind in dieser knappen Annäherung an Emmy Noethers Biographie hervorgehoben worden, die im Hinblick auf die oben formulierten Fragestellungen relevant sind: Das Sprechen über Mathematik bzw. das Dialogische als wesentliches Element ihrer mathematischen Tätigkeit und die Grenzüberscheitungen bzw. der Bruch mit tradierten Rollen. Diese Linien werden im weiteren Verlauf der Überlegungen berührt, doch zunächst ist es notwendig, einen mathematischen Text vorzustellen.

„Idealtheorie in Ringbereichen“

Noether publizierte, wir erwähnten es bereits, 1921 „Idealtheorie in Ringbereichen“, ihre erste große Arbeit im Gebiet der Algebra, die häufig als Beginn der Entwicklung der modernen Algebra betrachtet wird. Da sie mit ihren dort dargelegten Auffassungen, Methoden und Ergebnissen mathematisches Neuland betrat, ist vieles für mathematische Veröffentlichungen ungewöhnlich ausführlich dargelegt und bietet so die Möglichkeit einer erfolgreichen mathematischen, wissenschaftstheoretischen und wissenschaftshistorischen Spurensuche. Wichtig ist dabei im Blick zu haben, dass strukturelle Vorstellungen über die Mathematik, die uns heute, ob als ausgebildete Mathematikerinnen und Mathematiker oder nur in der Schule bis zum Abitur mit Mathematik konfrontiert, vertraut erscheinen, in den 1910er und 1920er Jahren befremdlich waren. Im folgenden beziehen wir uns insbesondere auf die Einleitung, deren erste Seite zitiert wird, um so der Leserin und dem Leser zu ermöglichen, einzelne Interpretationsschritte am Original zu verfolgen:

„Einleitung

Den Inhalt der vorliegenden Arbeit bildet die *Übertragung der Zerlegungssätze der ganzen rationalen Zahlen, bzw. der Ideale in algebraischen Zahlkörpern, auf Ideale in beliebigen Integritäts-, allgemeiner Ringbereichen.* Zum Verständnis dieser Übertragung seien vorerst für die ganzen rationalen Zahlen die Zerlegungssätze etwas abweichend von der üblichen Formulierung angegeben.

Faßt man in

$$a = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_s^{r_s} = q_1 q_2 \dots q_s$$

die Primzahlpotenzen q_i als Komponenten der Zerlegung auf, so kommen diesen Komponenten die folgenden charakteristischen Eigenschaften zu:

1. Sie sind *paarweise teilerfremd;* aber kein q ist als Produkt paarweise teilerfremder Zahlen darstellbar, also besteht in diesem Sinne Irreduzibilität. Aus der paarweisen Teilerfremdheit folgt noch, dass das Produkt $q_1 \dots q_s$ gleich dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen [$q_1 \dots q_s$] wird.

2. Je zwei der Komponenten, q_i und q_k, sind *relativprim*; d. h. ist $b \cdot q_i$ durch q_k teilbar, so ist b durch q_k teilbar. Auch in diesem Sinne besteht Irreduziblität.

3. Jedes q ist *primär*; d. h. ist ein Produkt $b \cdot c$ durch q teilbar, aber b nicht teilbar, so ist eine Potenz[1]) von c teilbar. Die Darstellung ist ferner eine solche durch *größte primäre Komponenten,* da das Produkt zweier verschiedener q nicht mehr primär ist. Auch in bezug auf die Zerlegung in größte primäre Komponenten sind die q irreduzibel.

4. Jedes q ist *irreduzibel* in dem Sinne, dass es sich nicht als kleinstes gemeinsames Vielfaches von zwei echten Teilern darstellen läßt.

Der Zusammenhang dieser primären Zahlen q mit den Primzahlen p besteht darin, dass es zu jedem q ein und (vom Vorzeichen abgesehen) nur ein p gibt, das Teiler von q ist und von dem eine Potenz durch q teilbar ist: die zugehörige Primzahl. Ist p^r die niedrigste derartige Potenz – r der Exponent von q – , so wird hier insbesondere p^r gleich q. Der Eindeutigkeitssatz läßt sich nun so aussprechen:

Bei zwei verschiedenen Zerlegungen einer ganzen rationalen Zahl in die irreduziblen, größten primären Komponenten q stimmen die Anzahl der Komponenten, die zugehörigen Primzahlen (bis auf das Vorzeichen) und die Exponenten überein. Wegen $p^r = q$ *folgt hieraus auch das Übereinstimmen der q selbst (bis auf das Vorzeichen).*

[1]) Ist diese Potenz stets die erste, so handelt es sich bekanntlich um Primzahlen. “ [Hervorhebung i. O.] (Noether 1921, 25)

Das mathematische Lesen

Für den heutigen Mathematiker ist Noethers „Idealtheorie“ ein klassischer Text, dessen Inhalte längst zu den selbstverständlichen Grundlagen der Algebra gehören. Ein modernes Lehrbuch der sogenannten *kommutativen Algebra* ist ohne die idealtheoretischen Konzepte und Ergebnisse von Emmy Noether undenkbar.

Nimmt man als Mathematiker einen Text wie die „Idealtheorie“ in die Hand, so wird man sich fragen:

- Womit beschäftigt sich der Text, und in welchem mathematischen Kontext steht er?
- Welches sind die Konzepte und Ergebnisse, die der Text präsentiert?
- Welches ist die neue Qualität der vorgestellten Konzepte und Ergebnisse?

Die erste Frage ist allgemeiner Natur. Bei der zweiten Frage geht es unter anderem darum, die mathematischen Inhalte zu verstehen, was mitunter sehr schwierig sein kann. Die abschließende dritte Frage führt zu einer Bewertung, bei der die Antworten der vorhergehenden Fragen einfließen werden. Im Folgenden soll versucht werden, auf einem allgemein verständlichen Niveau diese drei Fragen zu beantworten.

Die „Idealtheorie“ gehört in den Bereich der Algebra. Neben Geometrie und Analysis gehört die Algebra zu den klassischen Disziplinen der Mathematik. Ganz allgemein gesprochen beschäftigt sie sich mit diskreten Strukturen, im Gegensatz zu kontinuierlichen oder stetigen Strukturen und Prozessen. Zu den klassischen Problemen der Algebra gehört das Lösen von Gleichungen. Zwei Beispiele seien genannt:

Gleichung n-ten Grades

$$a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_2 X^2 + a_1 X^1 + a_0 X^0 = 0$$

Fermatsche Gleichung

$$X^n + Y^n = Z^n$$

Für die Gleichung n-ten Grades sucht man nach allgemeinen Lösungsverfahren. Für $n = 2$ spricht man von quadratischen Gleichungen, die zum heutigen Schulstoff gehören. Zur Erinnerung: Man erhält die Lösung durch Einsetzen in die Formel

$$X = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_2}.$$

Ähnliche Lösungsverfahren waren für $n = 3$ und $n = 4$ bereits lange vor dem 19. Jahrhundert bekannt. Den Durchbruch schaffte Niels Hendrik Abel (dessen 200. Geburtstag in diesem Jahr die norwegische Regierung zum Anlass genommen hat, einen Preis zu stiften, der als Äquivalent bzw. Ersatz für den nicht existierenden Mathematik-Nobelpreis gelten kann). Abel zeigte, dass es für $n \geq 5$ kein allgemeines Lösungsverfahren für die Gleichung n-ten Grades gibt.

Vor wenigen Jahren hat Andrew Wiles zeigen können, dass die Fermatsche Gleichung für $n > 2$ keine ganzzahligen Lösungen besitzt. Z. B. bilden für $n = 2$ die Zahlen $X = 3$, $Y = 4$ und $Z = 5$ eine Lösung, aber für $n = 3,4,5,\ldots$ gibt es solche Lösungen nach dem Ergebnis von Wiles nicht. Dieses Problem hatte zuvor als sogenannte Fermatsche Vermutung viele Mathematikergenerationen beschäftigt. An dieser Stelle sei auf die sehr lesenswerte und allgemein verständliche Darstellung von Simon Singh verwiesen (Singh 1998). Selbstverständlich beruht der Beweis von Wiles auf einem komplexen Theoriegebäude, zu dessen Grundpfeilern auch die Idealtheorie im Sinne von Noether gehört.

Für die Algebra spielt die Menge der sogenannten ganzen Zahlen

$$Z = \{\ldots, -1,0,1,2,3,\ldots\}$$

eine wichtige Rolle. Elementare Eigenschaften der ganzen Zahlen sind folgende:

- es gibt eine Addition;
- es gibt eine Multiplikation;
- für Addition und Multiplikation gelten Kommutativität, Assoziativität, und Distributivität;
- es gibt für jede Zahl a eine eindeutige Primfaktorzerlegung $a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_r^{n_r}$ (d. h. jedes p_i ist prim und $n_i \geq 1$ gilt für jedes i).

Beispielsweise ist $588 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 7^2$ eine solche eindeutige Primfaktorzerlegung. Es sei angemerkt, dass die eindeutige Primfaktorzerlegung viele und ganz alltägliche Anwendungen besitzt. Zum Beispiel ist sie die Grundlage für viele Verschlüsselungsverfahren, wie sie bei jeder Transaktion an einem Geldautomaten zur Anwendung kommen.

Die ganzen Zahlen bilden ein Beispiel für einen Ringbereich. Dieses Konzept wird in der „Idealtheorie" definiert und ist heute derart fundamental für die Algebra, dass man schlicht von einem Ring spricht. Vereinfacht gesprochen ist ein Ringbereich eine Menge von Elementen (auch Zahlen genannt), die man sinnvoll addieren und multiplizieren kann. Sinnvoll steht hier dafür, dass Kommutativität, Assoziativität, und

Distributivität gelten. Hier ist es wichtig festzustellen, dass in der Definition keine Primfaktorzerlegung verlangt wird. Ein Ringbereich, der beispielsweise für die Lösung quadratischer Gleichungen eine Rolle spielt, ist die mit $Z[\sqrt{-1}]$ bezeichnete Menge von Zahlen der Form $a+b\sqrt{-1}$, wobei a und b ganze Zahlen sind.
Den Inhalt der Noetherschen „Idealtheorie" bildet, wie sie selbst am Anfang schreibt, „die *Übertragung der Zerlegungssätze der ganzen rationalen Zahlen, bzw. der Ideale in algebraischen Zahlkörpern, auf Ideale in beliebigen Integritäts-, allgemeiner Ringbereichen.*" [Hervorhebung i. O.] (Noether 1921, S.25). Der Begriff „Zerlegungssatz" steht hier für einen Sachverhalt, der im Ring der ganzen Zahlen genau der eindeutigen Primfaktorzerlegung entspricht. Die Beschäftigung mit solchen Zerlegungssätzen geschieht vor dem Hintergrund, dass im Allgemeinen in einem Ringbereich keine eindeutige Primfaktorzerlegung erwartet werden kann. Dies sei an Hand zweier Beispiele erläutert.
Beispiel 1: Im Ringbereich $Z[\sqrt{-5}]$ lässt sich die Zahl 21 auf zwei verschiedene Weisen in Primfaktoren zerlegen:

$$3\cdot 7=(1+2\sqrt{-5})(1-2\sqrt{-5}) .$$

Beispiel 2: Im Ringbereich $Z[\sqrt[n]{-1}]$ hat man folgende Zerlegung:

$$X^n+Y^n=(1-q^1Y)(1-q^3Y)(1-q^5Y)\ldots(1-q^{2n-1}Y),$$

wobei $q=\sqrt[n]{-1}$. Ohne diese Zerlegung von X^n+Y^n im Detail zu verstehen, erkennt man, dass sie für die Lösung der Fermatschen Gleichung eine Rolle spielt, denn die Zerlegung hat genau n Faktoren, so wie auch Z^n eine Zerlegung von X^n+Y^n in n Faktoren darstellt. In der Tat hat der Mathematiker Lamé 1847 die fälschlicherweise angenommene Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung in $Z[\sqrt[n]{-1}]$ für einen (folglich fehlerhaften) Beweis der Fermatschen Vermutung benutzt. Übrigens ist die Primfaktorzerlegung in $Z[\sqrt[n]{-1}]$ tatsächlich eindeutig für $n<23$, aber eben nicht für ein beliebiges n.
Um die fehlende eindeutige Primfaktorzerlegung begrifflich zu fassen, haben Mathematiker wie Kummer und Dedekind sogenannte ideale Zahlen eingeführt. Kehren wir zum ersten Beispiel zurück, so benutzt man dort die idealen Zahlen a_1,a_2,b_1,b_2, um die Zahl 21 eindeutig zu zerlegen:

$$3=a_1a_2 \text{ und } 7=b_1b_2$$

$$1+2\sqrt{-5}=a_1b_1 \text{ und } 1-2\sqrt{-5}=a_2b_2 .$$

Der Begriff der idealen Zahl führt zu den sogenannten Idealen, wie Noether sie in ihrer „Idealtheorie" einführt und benutzt. Ein Ideal M in einem Ringbereich Σ ist eine Teilmenge der Menge Σ, so dass Folgendes gilt:

- $x, y \in M$ impliziert $x - y \in M$;
- $x \in M$ und $a \in \Sigma$ impliziert $ax \in M$.

Sei beispielsweise ein Element $a \in \Sigma$ gegeben, so bilden alle durch a teilbaren Elemente das von a erzeugte sogenannte „Hauptideal", das mit (a) bezeichnet wird. Im Ring Z der ganzen Zahlen ist jedes Ideal ein Hauptideal, also von der Form a für eine ganze Zahl $a \in Z$.

Die Teilbarkeitsbeziehung von Elementen eines Rings lässt sich problemlos auf Ideale übertragen. Man sagt, das Ideal M ist durch ein zweites Ideal N teilbar, falls M eine Teilmenge von N ist. Im Beispiel der ganzen Zahlen sieht man, dass die Zahl a durch eine zweite Zahl b genau dann teilbar ist, wenn das Ideal (a) durch (b) teilbar ist. Die Teilbarkeitsbeziehung führt in natürlicher Weise zum Begriff des größten gemeinsamen Teilers von zwei Idealen. Der größte gemeinsame Teiler von M und N ist als Schnittmenge $M \cap N$ definiert und ist wiederum ein Ideal. Ähnlich lassen sich Begriffe wie Primzahl und kleinstes gemeinsames Vielfaches auf Ideale übertragen.

Die „Übertragung der Zerlegungssätze", von der Noether in der Einleitung zur „Idealtheorie" spricht, beruht nun auf dem Wechsel von den Zahlen (oder Elementen eines Ringbereichs) zum allgemeineren Begriff des Ideals. Dieser Übergang ermöglicht es ihr, Ergebnisse zu formulieren und zu beweisen, die zuvor nur in Spezialfällen bekannt waren. Eine „Übertragung" findet auch noch hinsichtlich der Allgemeingültigkeit statt, denn Zerlegungssätze gab es zuvor nur für gewisse Ringbereiche, nämlich für algebraische Zahlkörper und für Polynombereiche.

In der „Idealtheorie" werden also bekannte Ergebnisse erstens weitgehend verallgemeinert und zweitens durch das Einführen neuer Konzepte entscheidend vereinfacht. Im Rahmen dieses Vorgehens, das Noether in ihrer Bescheidenheit als „Übertragung" bezeichnet, gelingt es auch, eine wichtige Voraussetzung herauszuarbeiten. Noether schreibt: „Wir legen nun im folgenden nur *solche Ringe Σ zugrunde, die die* *E n d l i c h k e i t s b e d i n g u n g erfüllen: Jedes Ideal in Σ ist ein endliches, besitzt also eine Idealbasis*." [Hervorhebung i. O.] (Noether 1921, S.30). Diese Endlichkeitsbedingung ist in der Tat notwendig für derartige Zerlegungssätze, und man bezeichnet heute deshalb vollkommen zu Recht Ringe, die diese Bedingung erfüllen, als noethersch (Matsumura 1986).

Das historisierende und wissenschaftstheoretische Lesen

Mit begrifflicher Mathematik lassen sich, wie im ersten Abschnitt bereits erwähnt, die Auffassungen und Methoden Noethers charakterisieren. Um Begriffe ging es ihr, um Worte, die es zu bestimmen gilt, um ihre Reichweite und ihre Präzision oder Schärfe in mathematischen Arbeiten und um die Lust am Disput. Aber was versteht Noether unter Begriffen und wie werden mathematische Begriffe gebildet bzw. bestimmt? Um Noethers begriffliche Auffassungen und ihre sich daraus ergebene Methode näher zu bestimmen, sei mit Ernst Cassirer, einem zeitgenössischen Philosophen, ein Blick von außen darauf geworfen und hier einige Ergebnisse kurz angerissen. Cassirer veröffentlichte 1910 „Substanzbegriff und Funktionsbegriff". In seiner Analyse klassischer Logik und moderner mathematischer Begriffsbildung – er orientiert sich u. a. an Peano, Dedekind und Hilbert – erweist sich Cassirer als ein Zeitzeuge der sich um die Jahrhundertwende abzeichnenden Veränderungen in der Mathematik. Mit zwei Zitaten möchte ich kurz seine Position und damit den Ausgangspunkt der Überlegungen verdeutlichen. Cassirer spricht in seiner Analyse vom Grundbegriff der Substanz:

„Die logische Form der Begriffsbildung und der Definition kann nur im Hinblick auf diese Grundverhältnisse des Realen festgestellt werden. Die Bestimmung des Begriffs durch seine nächst höhere Gattung und durch die spezifische Differenz gibt den Fortschritt wieder, kraft dessen die reale Substanz sich successiv in ihrer besonderen Seinsweise entfaltet. [...] Das vollständige System der wissenschaftlichen Definitionen wäre zugleich der vollständige Ausdruck der substanziellen Kräfte, die die Wirklichkeit beherrschen." (Cassirer 1910, S.9)

Die traditionelle Art der Begriffsbildung sichert sich, das ist der entscheidende Punkt, über den Bezug zur Substanz der realen Welt ab; zentrale Elemente dieser ontologischen Auffassung von Begriffsbildung sind Erkennen von Ähnlichkeit der realen Dinge und Abstraktion von ihren Besonderheiten. Dagegen stellt Cassirer den Funktionsbegriff:

„In den Definitionen der reinen Mathematik aber ist [...] die Welt der sinnlichen Dinge und Vorstellungen nicht sowohl wiedergegeben, als vielmehr umgestaltet und durch eine andersartige Ordnung ersetzt. Verfolgt man die Art und Weise dieser Umbildung, so heben sich hierbei bestimmte Formen der Beziehung, so hebt sich ein gegliedertes System streng unterschiedener gedanklicher Funktionen heraus, die durch das einförmige Schema der ‚Abstraktion' nicht bezeichnet, geschweige begründet werden." [Hervorhebung i. O.] (ebenda, S.18).

Noethers Auffassung und Umgang von Begriffen ist, folgt man Cassirers Konzept einer Unterscheidung im Verständnis von Begriffen in Substanzbegriff und Funktionsbegriff, eine im ontologischen Sinne „freie Produktion von bestimmten Relationszusammenhängen". Ein Rückgriff auf die Substanz, die konkreten Elemente im Sinne illustrierender Beispiele wird nicht nur nicht benötigt, sondern ist zur Herstellung des Begriffszusammenhanges hinderlich. Dieses Verständnis von Begriffen als Benennung von Beziehungen, die erst die Ähnlichkeit der Dinge herstellen, ist Noethers Perspektive. Begriffe sind nicht Abstraktionen von untersuchten Gegenständen wie etwa den natürlichen Zahlen. Sie sind abstrakt, weil sie nicht darauf angewiesen sind, sich bezogen auf irgendeine Substanz im Cassirerschen Sinne zu erklären.

Wenden wir uns jetzt wiederum dem zitierten Text aus der Einleitung der „Idealtheorie im Ringbereich" zu, der sich nun mit den Überlegungen Cassirers im Hintergrund als ein Lehrstück über begriffliche Mathematik zeigt. Noether sah 1921 die Notwendigkeit, in sehr ausführlicher Weise ihr methodisches Vorgehen zu präsentieren, ihre zu dieser Zeit für die meisten ihrer Kollegen sehr befremdlichen Methoden immer wieder an Vertrautes anzubinden, ohne dabei Abstriche an ihren begrifflichen Auffassungen und Methoden zu machen. Mit anderen Worten: sie hatte ihre Leser im Blick und wollte verstanden werden. Beginnen wir ebenso wie in der mathematischen Lesart mit dem ersten Satz der Einleitung. Noether schrieb: „Den Inhalt der vorliegenden Arbeit bildet die *Übertragung der Zerlegungssätze der ganzen rationalen Zahlen, bzw. der Ideale in algebraischen Zahlkörpern, auf Ideale in beliebigen Integritäts-, allgemeiner Ringbereichen.*" [Hervorhebung i. O.] (Noether 1921, S.25). Ist dieser Satz zunächst eine Formulierung des behandelten mathematischen Problems, wie es die mathematische Lesart zeigt, oder genauer seine Schaffung, so handelt es sich auf einer darunter liegenden Ebene um die Benennung eines methodischen Konzepts. Es ist nicht eine Übertragung zwischen qualitativ Gleichem wie etwa die im ersten Teil angedeutete Verschiebung der Zerlegungssätze von dem Bereich der ganzen Zahlen in den Bereich der algebraischen Zahlkörper, die nur eine Verallgemeinerung oder ‚Abstraktion von' bedeutet. Die Perspektive wandelt sich. Nicht konkrete Zahlen werden betrachtet, sondern Konstruktionen, die durch Begriffe, hier Ideal und Ring, bezeichnet sind. In der mathematischen Interpretation ist von dem Wechsel von Zahlen zu Idealen die Rede. Sind zuvor die Zerlegungssätze für konkret gegebene Elemente ausgesprochen, lag also der Ausgangspunkt bei den Eigenschaften z. B. der ganzen Zahlen, so wählte Noether nun genau die umgekehrte Richtung: Ihr Ausgangspunkt sind allgemeine Ringbereiche und sie betrachtet in diesen die Eigenschaften bestimmter Ideale, losgelöst von spezifischen Eigenschaften der in dem einen oder anderen Fall die Ideale bildenden Elemente. Noether ging noch einen Schritt weiter: Die Zusammenhänge zwischen den konstruierten Objekten, den Idealen, drücken sich nun in den Zerlegungssätzen aus, die Zusammenhänge zwischen den Begriffen in der Betrachtung der Verallgemeinerung von beliebigen Integritätsbereichen, den Ringbereichen. Begriffe als konstruktive Zusammenhänge zu verstehen und in Zusammenhängen zu betrachten, beschreibt Noethers „Auffassungsmethoden".

Die Interpretation des Wortes Übertragung im Sinne einer die

Perspektiven veränderten Verschiebung wird durch den zweiten Satz bestätigt. Noether schrieb: „Zum Verständnis dieser Übertragung seien *vorerst* für die ganzen rationalen Zahlen die Zerlegungssätze *etwas abweichend* von der *üblichen Formulierung* angegeben." [Hervorhebung d. A.] In den Worten „etwas abweichend" liegt die Verschiebung der Sichtweise. Der dritte Satz zeigt die veränderte Perspektive, denn in der mathematisch formalen Beschreibung der Zerlegung tauchen jetzt neben den Primzahlen die Primzahlpotenzen auf.

Im zweiten Satz zeigt sich noch etwas anderes. Mit den Worten „zum Verständnis", „vorerst" und „etwas abweichend von der üblichen Formulierung" wird dokumentiert, dass Noether sich eines Gegenübers bewusst ist und die Leserin/den Leser in den Prozess ihrer Gedankenbildung mit einbeziehen will. Dieses Muster haben wir bereits in der biographischen Annäherung als einen Aspekt ihres mathematischen Handelns entwickelt. Sie tritt in einen Dialog mit dem Leser ein, weiß um das Ungewöhnliche ihres Vorhabens und Vorgehens, nimmt in den Worten „etwas abweichend" bereits möglich Einwendungen auf. So zeigt sich dieser Satz, der für ein mathematisches Verständnis bedeutungslos war und sich deshalb in einer mathematischen Interpretation auch nicht findet, für eine wissenschaftshistorische und wissenschaftstheoretische Lesart des Textes von großer Relevanz.

Diese Überlegungen werden später wieder aufgenommen, zunächst ist noch einmal auf den Einleitungstext einzugehen. Im dritten Satz spricht Noether von den Primzahlpotenzen als „Komponenten der Zerlegung", denen bestimmte „charakteristischen Eigenschaften" zukommen. Damit weicht sie, wie bereits im zweiten Satz ankündigt, von der üblichen Perspektive ab, lenkt den Blick von den Primzahlen auf die Komponenten der Primzahlzerlegung. Hinter dieser Verschiebung des Blickes von den Primzahlen auf die Zerlegungskomponenten liegt das grundsätzlich andere Vorgehen in dem Prozess der Begriffsbildung, wie Cassirer es mit folgenden Worten beschrieb:

„Die Einheit des Begriffsinhaltes kann somit aus den besonderen Elementen des Umfanges nur in der Weise ‚abstrakt' werden, dass wir uns an ihnen der spezifischen Regel, durch die sie in Beziehung stehen, bewußt werden: nicht aber derart, dass wir diese Regel aus ihnen, durch bloße Summierung oder Fortlassen von Teilen, zusammensetzen." [Hervorhebung i. O.] (Cassirer 1910, S.22).

In dieser Verschiebung zeigt sich Noethers Vorgehen bei der Bestimmung von Begriffen. In dem Blick auf die Primzahlen, der Erinnerung an die vertraute Reihe 2, 5, 7, 11,... klingt die Suche nach dem Substanziellen, den sich notwendig aus ihrer realen Existenz ergebenden Eigenschaften mit. Zerlegungskomponenten sind als Konstrukte deutlich; sie sind abstrakt, nicht Abstraktionen von etwas. Mit diesem Kunstgriff gelingt es Noether, alte Sehgewohnheiten zu brechen und „an ihnen die spezifischen Regeln, durch die sie in Beziehung stehen, „bewusst werden" zu lassen.

Die spezifischen Regeln, das sind die charakteristischen Eigenschaften, auf die Noether im dritten Satz der Einleitung orientiert und unter Punkt eins bis vier mit *paarweise teilerfremd*, *relativ prim*, *primär* und *irrreduzibel* benennt. Damit ist Perspektivverschiebung zu einem methodischen Prinzip geworden. Es wird etwas sichtbar und denkbar, das vorher nicht gesehen, nicht gedacht werden konnte, d. h. ein Verständnis von Begriffen als Funktionsbegriffe eröffnet ein anderes methodisches Vorgehen.
Die begriffliche Auffassung bestimmte auch die Beschreibung des Begriffs, wie das Beispiel *primär* zeigt. Im ersten Teil, durch „d. h." angedeutet, wird *primär* als eine Eigenschaft von q formal gefasst, indem die Relationen, in denen q zu anderen Elementen steht, beschrieben werden, und zwar ohne Rückgriff auf die Eigenschaften von Primzahlen oder ganzen Zahlen, sondern nur durch Bezugnahme auf die Teilbarkeitsrelation. Im zweiten Teil diskutiert Noether diese Definition und lotet aus, welche Konsequenzen sie für die weiteren Untersuchungen haben könnte. Dabei greift sie auch auf andere Begriffe zurück und stellt begriffliche Zusammenhänge her; die Begriffe werden diskursiv bestimmt. Den diskursiven Teil setzt sie zwei Seiten weiter fort, verweist auf Literatur, in der die Begriffe verwendet werden und bewertet unterschiedliche Definitionen in ihren Ausgangsperspektiven und Reichweiten. Auch in dieser Textpassage ist Noethers Schreiben dialogisch, hat sie den potentiellen Leser im Blick. Sie geht auf einen vorhandenen mathematischen Diskurs ein und erweitert ihn um eine neue Perspektive, indem sie die Begriffe in den Vordergrund stellt. Ihr Vorgehen ist im ursprünglichen Sinne diskursiv, ein Denken in Begriffen. Ihre Darstellung dieses Denkens aber lädt den Leser zur Teilhabe an diesen Denkbewegungen ein.
Ein Blick noch auf die Fußnote auf der ersten Seite der Einleitung: Hier stellt Noether explizit den Bezug zum Leser und seinen angenommenen Verständnisschwierigkeiten her. Sie schreibt, „Ist diese Potenz stets die erste, so handelt es sich *bekanntlich* um Primzahlen" [Hervorhebung d. A.], eine bei mathematischer Lesart überflüssige Bemerkung. Der Grund ihrer Formulierung erschließt sich erst in der wissenschaftstheoretischen Interpretation.
Das auf den vorhergehenden Seiten analysierte Beispiel illustriert wesentliche Aspekte des Begriffsbestimmungsprozesses bei Noether. Es ist ungewöhnlich ausführlich, doch lassen sich die drei herausgearbeiteten Elemente in fast allen Begriffsbestimmungen auch späterer Veröffentlichungen finden. Noether beginnt mit einer Verschiebung der Blickrichtung, hier von Primzahlen zu Zerlegungskomponenten, die mit tradierten Seh- und Denkgewohnheiten bricht. Durch das Aufbrechen von Denkbarrieren gelingt es ihr, die mathematischen Objekte als Konstrukte im Sinne von Cassirers Funktionsbegriff erkennbar werden zu lassen und damit ihre charakteristischen Eigenschaften zu bestimmen.

Diese Eigenschaften werden formal beschrieben. Die im üblichen mathematischen Verständnis eigentliche Definition wird durch ihren formalsprachlichen Charakter, zuweilen auch durch kursive Schreibweise von anderen Textpassagen abgegrenzt. In dieser formalen Beschreibung verwendet Noether mathematische Symbolik als eine Technik zur präzisen Darstellung der Untersuchungsgegenstände, auf das Wesentliche beschränkend, ohne ontologisches Beiwerk. So wird die Konstrukthaftigkeit der Forschungsgegenstände um so deutlicher, ihre begriffliche Bestimmung als Zusammenhang ohne ontologische Verankerung.
Einen dritten Teil der Begriffsbestimmung beginnt Noether meist mit „m. a. W.“, „mit anderen Worten“ oder „läßt sich auch so aussprechen“. Dieser oft in der Textgestaltung noch dem formalen Teil zugehörig scheinende Part eröffnet ein Nachdenken über den Begriff aus verschiedenen Richtungen, das zu einem tieferen Verständnis, einer „klaren Durchdringung“ des Begriffs, wie Noether es nannte, führt. Weitere Möglichkeiten formaler Definitionen, Einbettung in den aktuellen und historischen Kontext, Herstellung von Bezügen zu der Definition des Begriffs durch andere Autoren und die Benennung der Zusammenhänge zu weiteren Begriffen ihrer eigenen Untersuchung sind wichtige Elemente dieser diskursiven Begriffsbestimmung. Noether diskutiert den Begriff gewissermaßen mit einem fiktiven Gegenüber, dessen Verständnisschwierigkeiten, Einwendungen und Anmerkungen Noether ohne sie etwa als Fragen zu explizieren, in verschriftlichter Rede entgegentritt. Dabei wechselt sie vielfach die Perspektive und stellt damit eine Multiperspektivität auf den Forschungsgegenstand, den Begriff her. Mit Dialogizität lässt sich dieses Schreiben charakterisieren, das sich durch die Arbeiten Noethers zieht und je in den diskursiven Passagen seinen stärksten Ausdruck findet.
Zum Verständnis der Bedeutung Noethers und ihres Einflusses auf die Mathematik ist neben ihren Publikationen, wir verwiesen bereits im ersten Teil darauf, auch die sich um sie gründende Schule in den Blick zu nehmen, der nicht nur ihre jungen Doktoranden und Postdoktoranden, sondern ebenso etablierte Wissenschaftler anderer mathematischer Disziplinen wie etwa Topologie und Zahlentheorie angehörten. Noethers Arbeiten erwiesen sich über die Veröffentlichung von Forschungsergebnissen hinaus als Lehrstücke ihrer begrifflichen Auffassung und Methoden und entfalteten über die Rezeption durch die Noether-Schule eine doppelte Wirksamkeit.

Zur Dialogizität des Textes

Ohne auf die von dem Literaturwissenschaftler Michael Bachtin in seinem in den 1930er Jahren geschriebenen Aufsatz „Das Wort im Roman" (Bachtin 1979) entwickelte Theorie der Dialogizität tiefer einzugehen, wollen wir im folgenden skizzieren, welche Ergebnisse aus einer These der Dialogizität der mathematischen Texte Noethers zugewinnen sind. Oder mit anderen Worten: Bachtins Konzept einer Dialogizität literarischer Texte wird als Inspiration einer textorientierten wissenschaftshistorischen und wissenschaftstheoretischen Auseinandersetzung mit dem mathematischen Werk Noethers genutzt. Der Text wird als Text in seiner Gesamtheit ernst genommen. Eine Unterscheidung in relevante und nicht relevante Passagen, wie sie eine mathematische Lesart vornimmt, unterbleibt. Mit Bachtins Konzept im Hintergrund können die Effekte einerseits einer mathematischen, andererseits einer wissenschaftshistorisch/ wissenschaftstheoretischen Lesart pointiert sichtbar gemacht werden. Damit erhalten wir möglicherweise auch Antworten auf die Frage nach der Bedeutung der Biographie von Akteuren/innen des Wissenschaftsprozesses, die Erfahrung von Geschlechterdifferenz einschließend, für wissenschaftliches Denken und Tun.

Bachtin selbst ist nicht eindeutig in der Frage, ob jeder literarische Text grundsätzlich dialogisch ist oder ob man von einem Grad an Dialogizität sprechen kann. Wir folgen einer Interpretation seiner Texte, von einer unterschiedlichen Ausprägung der Dialogizität zu sprechen (vgl. Martinez 1996, S.433). In seiner Konzeption einer Theorie der Dialogizität hat Bachtin sich ausdrücklich auf das Romanwort als künstlerisches Wort bezogen. In der Argumentation spricht er in Gegenüberstellung dazu von „der lebenspraktischen oder wissenschaftlichen Rede [als] lediglich künstlerisch neutral[em] Kommunikationsmittel" (Bachtin 1979, S.155) und beschränkt damit seine theoretischen Überlegungen auf den literarischen Bereich.

Tatsächlich scheint ein mathematischer Text im Kontext mathematischer Interpretation, wie unsere Lesart ihn im dritten Abschnitt präsentierte, zunächst wenig dialogisch. Erstes Ergebnis eines Vergleichs der beiden Lesarten ist, dass sich die Dialogizität eines mathematischen Textes nicht unmittelbar zeigt, sondern es einer bestimmten, den Text historisierenden Perspektive bedarf, sie zu erkennen. Im folgenden gehen wir von dieser Analyseperspektive aus und verweisen auf die mathematische Sicht als Gegenhorizont. Vier Aspekte sind in der historiographisch/ wissenschaftstheoretischen Lesart sichtbar geworden:

- Ein Gegenüber wird von Noether mitgedacht.
- Perspektivänderungen und -verschiebungen sind Elemente ihres methodischen Vorgehens.
- Noethers Bestimmung von Begriffen ist als diskursiver Prozess zu begreifen.

- Eine scharfe Trennung zwischen mündlichen und schriftlichen Äußerungen ist nicht aufrecht zu erhalten.

Wie in der Analyse des Einleitungstextes erkennbar wurde und sich in vergleichbarer Weise in den meisten ihrer Veröffentlichungen findet, hatte Noether im Prozess des Schreibens auch die Perspektive des Lesenden im Blick. Ihre mathematische Argumentation geht von einem zu erwartenden Wissenshorizont aus und von einer bestimmten Perspektive auf die mathematische Welt. Bachtin spricht von dem Apperzeptionshintergrund des Hörers, vor dem der Sprecher seine Äußerungen formuliert:

„Der Sprecher ist bestrebt, sein Wort mit seinem spezifischen Horizont am fremden Horizont des des Verstehenden zu orientieren und tritt in ein dialogisches Verhältnis zu den Momenten dieses Horizonts. Der Sprecher dringt in den fremden Horizont des Hörers ein, errichtet seine Äußerung auf fremdem Grund und Boden, vor dem Apperzeptionshintergrund des Hörers.“ (Bachtin 1979, S.175)

Noether will nicht nur ihre mathematischen Forschungsergebnisse publizieren, sondern auch in ihrem methodischen Vorgehen verstanden werden. Das Ziel einer Veröffentlichung ist also ein doppeltes, der Präsentation mathematischer Ergebnisse und der Darstellung ihrer Auffassungen und Methode. Das gilt ebenso für die 1921 geschriebene „Idealtheorie in Ringbereichen“ wie 1933 für ihren großen Vortrag „Hyperkomplexe Systeme in ihren Beziehungen zur kommutativen Algebra und zur Zahlentheorie“ auf dem Internationalen Mathematikerkongress. Sie schrieb in seinen Abdruck: „Mit dieser Skizze, die ich später aufführen werde, möchte ich zugleich das *Prinzip der Anwendung des Nichtkommutativen auf das Kommutative* erläutern“ [Hervorhebung d. A.] (Noether 1932, S.189) und gab damit der Methode Priorität gegenüber dem Ergebnis.

Bachtin stellt in seinem Konzept „die allgemeine einheitliche Sprache, ein System sprachlicher Normen“ als Ausdruck von Herrschaft der Redevielfalt als Ausdrucksform marginalisierter Gruppen gegenüber:

„Wir erfassen die Sprache nicht als ein System abstrakter grammatischer Kategorien, sondern als *ideologisch gefüllte* Sprache, Sprache als Weltanschauung und sogar als konkrete Meinung. [...] Deswegen bringt die Einheitssprache die Kräfte einer konkreten Vereinheitlichung und Zentralisierung des ideologischen Wortes zum Ausdruck, die in einem untrennbaren Zusammenhang mit den Prozessen der sozialpolitischen und kulturellen Zentralisation stehen.“ [Hervorhebung i. O.] (Bachtin 1979, S.164)

Er konkretisiert sein Verständnis von der dialogisierten Redevielfalt, wenn er vom „dialogische[n] Prinzip der Sprache, das vom Kampf der sozialsprachlichen Standpunkte und nicht vom innersprachlichen Kampf der individuellen Willensäußerung oder von logischen Widersprüchen bedingt war“ (Bachtin 1979, S.166f), spricht. Bachtins Überlegungen korrespondieren mit einer pointierten Wahrnehmung des mathematisch-historischen Kontextes, in dem Noether sich bewegt und zu bewegen hat.

Noethers methodische Auffassung und Arbeitsweise einer Orientierung an Begriffen, ihr Denken in Strukturen, stehen einem tradierten algebraischen Denken gegenüber, das sich mit Cassirers Substanzbegriff charakterisieren ließ. Das dialogische Schreiben Noethers erscheint damit als Strategie zur Anerkennung und Etablierung begrifflicher Auffassungen und Methoden.

Durch die Verschiebung oder Veränderung der Perspektive auf Begriffe und die Verdeutlichung ihrer Konstruiertheit im Sinne eines Cassirerschen Funktionsbegriffs werden Eigenschaften erst sichtbar, Zusammenhänge erkennbar, Begriffe präzise bestimmbar und ein Denken in Strukturen möglich. Zugleich wird Multiperspektivität erzeugt, ein methodisches Vorgehen, das in dem im Anschluss auch an Noether neu entstandenen mathematischen Gebiet der Kategorientheorie seine formalisierte Gestalt bekam (vgl. Koreuber/Große-Rhode 1998). Bachtin bietet an, hier vom zwei- oder mehrstimmigen Wort zu sprechen „mit einer Ausrichtung auf ein fremdes Wort.“ (Bachtin 1971, S.222, zitiert nach Martinez 1996)

„Zudem sind diese beiden Stimmen dialogisch aufeinander bezogen, sie wissen gleichsam voneinander, [...] sie führen gleichsam ein Gespräch miteinander. Das zweistimmige Wort ist stets im Innern dialogisiert. [...] In ihnen ist ein potentieller, unentwickelter und konzentrierter Dialog zweier Stimmen, zweier Weltanschauungen, zweier Sprachen angelegt.“ (Bachtin 1979, S.213)

Dieser innere Dialog eines Wortes wird von Noether expliziert, wenn sie als gleichwertig neben die erste Definition eines Begriffes verbunden durch „d. h.“ oder „mit anderen Worten“ eine weitere Definition stellt. Doch anders als in der literarischen Welt kann in der Mathematik auch bei Einnahme einer Multiperspektivität nicht der eindeutige Wahrheitsbegriff zu Gunsten einer mehrdeutigen, historisierenden, jedenfalls kontextualisierten Interpretation aufgegeben werden. Es zeigt sich, dass Bachtins Konzept der Dialogizität nicht ohne Veränderungen auf mathematische Texte angewendet werden kann. Eines der wesentlichen Elemente seiner theoretischen Überlegungen, die Vielstimmigkeit des Wortes, die Mehrdeutigkeit bedeutet, kann bei der Lektüre mathematischer Texte auch aus wissenschaftstheoretischer Perspektive nicht aufrecht erhalten werden und hat doch zugleich bestimmte Elemente des methodischen Vorgehens Noethers sichtbar gemacht. Festzuhalten ist, dass sich Perspektivänderung als methodisches Prinzip zeigt, wenn man von einer mathematischen Lesart zu einer wissenschaftstheoretischen wechselt.

Noethers Vorgehen bei der Begriffsbestimmung ist nicht beschränkt auf die formale Definition. Sie enthält neben dem Prinzip der Perspektivveränderung auch die Einbettung in einen historischen und aktuellen mathematischen Kontext, wird also eingebunden in einen existierenden mathematischen Diskurs. In ihrem einordnenden und bewertenden Schreiben spricht Noether implizit ein fiktives Gegenüber an;

dialogisches Schreiben wird so zu einem methodischen Vorgehen, das die Präzision und Schärfe der Begriffsbestimmung sichert.
Wir haben in der Biographie ein Bild Noethers gezeichnet, das sie als Mathematikerin zeigt, der Sprechen und Zuhören, der Dialog, ein wesentliches Element mathematischen Forschens war. Bezieht man in die Analyse mathematischer Äußerungen neben den Publikationen auch andere Quellen wie Briefe, Gutachten oder die Erinnerung von Zeitzeugen mit ein, so zeigt sich, dass eine scharfe Trennung zwischen Textsorten, Sprachebenen o. ä. nicht möglich ist. Schreiben erscheint vielmehr als Fortsetzung des Sprechens, als verschriftlichte Rede, Lesen als Fortsetzung des Hörens und Publizieren als Verdichtung von Gesprochenem.
Fassen wir unsere Überlegungen zusammen: Dialogisches Schreiben ist mehr als ein didaktischer Kniff; es ist Teil des methodischen Vorgebens Noethers. Eine Theorie der Dialogizität erweitert auf mathematische Texte hilft, die Mathematik als sozialen und kulturellen Prozess erkennbar und mathematische Erkenntnisprozesse sichtbar werden zu lassen.

Fazit

Die Inszenierung eines Dialogs zwischen feministischer Theorie und wissenschaftlichem Mainstream scheint implizit die Erwartung einer Veränderung vorzugsweise für den Bereich des Mainstreams zu enthalten. Die Erwartungshaltung ist durchaus berechtigt, wie andere Aufsätze dieses Buches zeigen, doch plädieren wir in diesem Beitrag dafür, sich zunächst mit der etwas bescheideneren Variante zu begnügen, Neues zu sehen. Dieses aber gilt gleichermaßen für Mathematik wie feministische Theorie. Mathematik zeigt sich im Allgemeinen äußerst widerständig, die Reflektion anderer, seien es Philosophen, Historiker oder Soziologen, über Mathematik und mathematisches Handeln aufzunehmen (vgl. Heintz 2000), so dass dies nicht als ein nur der feministischen Theorie oder allgemeiner einer kritischen Perspektive geschuldetes Phänomen gelten kann.
Wissenschaftshistorische und wissenschaftstheoretische Überlegungen, so formulierten wir zu Beginn, könnten sich als Bindeglied zwischen feministischer Theorie und wissenschaftlichem Mainstream erweisen. Im Verlauf der Untersuchungen gelang es, Verbindungen herzustellen zwischen der vor dem Hintergrund der Ergebnisse einer historischen Frauenforschung skizzierten Biographie und ihren mathematischen Texten. Insbesondere zwei Linien ließen sich verfolgen: Kommunikation und Überschreitung von Rollentradierungen als zentrale Elemente ihrer Biographie fanden sich in den Texten wieder als Dialogizität und Überschreitung von Denkgeboten.

Und mehr als das: Die historisch/wissenschaftstheoretische Lesart ermöglichte zu erkennen, dass es sich nicht nur um Charakteristika etwa der inhaltlichen Vermittlung, sondern um Elemente des methodischen Vorgehens Noethers handelt. Damit wurde die Verbindung zur mathematischen Lesart hergestellt, die in ihrer ahistorischen Vorgehensweise die mathematischen Ergebnisse des Textes präsentierte, aber den Prozess ihrer Entstehung nicht explizit machen konnte. Dieses zu leisten, und sei es über den Umweg einer Historisierung und Kontextualisierung des Textes, wird für Mathematiker auch im Sinne ihres Faches von Interesse sein. Für die feministische Theorie, die Mathematik, wenn überhaupt, in der Regel nur als monolithischen Block wahrnimmt, könnte dieser Ansatz einer Orientierung auf mathematische Texte, der den soziokulturellen Prozess des Entstehens von Mathematik sichtbar werden lässt, zu einem differenzierten und weniger durch Distanz gekennzeichneten Verhältnis führen.

Literatur

Alexandroff, P. S.: "In Memory of Emmy Noether", in Brewer, James W.; Smith, Martha K. (Hrsg.): "Emmy Noether. A Tribute to Her Life and Work", Dekker, New York 1981.

Bachtin, Michail M.: „Die Ästhetik des Wortes", Suhrkamp, Frankfurt am Main 1979.

Cassirer, Ernst: „Substanzbegriff und Funktionsbegriff", Verlag Bruno Cassirer, Berlin 1910.

Dick, Auguste: „Emmy Noether 1882-1935", in „Beihefte zur Zeitschrift ‚Elemente der Mathematik', 13", Birkhäuser, Basel 1970.

Heintz, Bettina: „Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin", Springer, Wien 2000.

Koreuber, Mechthild; Große-Rhode, Martin: „Vom Begriff zur Kategorie", in Siefkes, Dirk u. .a. (Hrsg.): „Sozialgeschichte der Informatik", Deutscher Universitäts-Verlag, Wiesbaden 1998.

Koreuber, Mechthild: „Emmy Noether, die Noether-Schule und die ‚Moderne Algebra'", in Götschel, Helene; Daduna, Hans (Hrsg.): „Perspektivenwechsel", Talheimer, Mössingen-Talheim 2001.

Martinez, Matias: „Dialogizität, Intertextualität, Gedächtnis", in Arnold, Heinz Ludwig; Detering, Heinrich (Hrsg.): „Grundzüge der Literaturwissenschaft", dtv, München 1996.

Matsumura, Hideyuki: „Commutative ring theory", Cambridge University Press 1986.

McKee, Ruth S.; Quinn, Grace S.; Lehr, Marguerite; Taussky, Olga: „Emmy Noether in Bryn Mawr", in Srinivasan, Bhama; Sally, Judith (Hrsg.): „Emmy Noether in Bryn Mawr", Springer, New York 1983.

Noether, Emmy: „Idealtheorie in Ringbereichen“, in „Mathematische Annalen, 83“, Göttingen 1921.

Noether, Emmy: „Hyperkomplexe Systeme in ihren Beziehungen zur kommutativen Algebra und zur Zahlentheorie“, in „Verhandlung des Internationalen Mathematiker-Kongresses Zürich“, Zürich 1932.

Noether, Emmy; Schmeidler, W.: „Moduln in nicht-kommutativen Bereichen, insbesondere aus Differenzenausdrücken“, in „Math. Zs. 8“, Göttingen 1920.

Singh, Simon: „Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels“, Carl Hanser, München 1998.

Tollmien, Cordula: „’Sind wir doch der Meinung, daß ein weiblicher Kopf nur ganz ausnahmsweise in der Mathematik schöpferisch tätig sein kann.’ Emmy Noether 1882-1935“, in „Göttinger Jahrbuch, 38“, Göttingen 1990.

Waerden, Bartel L. van der: „Nachruf auf Emmy Noether“, in „Mathematische Annalen 111“, Leipzig 1935.