4 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Wir lernen nun eine Klasse von linearen Differentialgleichungen kennen, deren Lösungen man explizit beschreiben kann. Als Hilfsmittel benötigen wir dazu die Matrixexponentialfunktion, die wir uns zunächst anschauen.

Auch in diesem Abschnitt bezeichne $\mathbb{K}$ einen der Körper $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$, $\|.\|_2$ sei die Euklidische Norm auf $\mathbb{K}^n$ und $\|.\|$ die induzierte Operatornorm auf $L(\mathbb{K}^n)$. Die normierten linearen Räume $(\mathbb{K}^n, \|.\|_2)$ und $(L(\mathbb{K}^n), \|.\|)$ sind vollständig.

4.1 Die Exponentialfunktion für Matrizen

Sei $A \in L(\mathbb{K}^n)$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\|A^n\|$, denn $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\|A\|^n = e^{\|A\|}$ ist eine konvergente Majorante. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n$ konvergiert also absolut, und da $(L(\mathbb{K}^n), \|.\|)$ vollständig ist, konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n$ in diesem Raum. Wir nennen

$$\exp A := e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n \tag{4.1}$$

die *Matrixexponentialfunktion.*

Satz 4.1 *(a) Die Reihe in* (4.1) *konvergiert gleichmäßig auf jeder beschränkten Teilmenge von* $L(\mathbb{K}^n)$*.*

(b) Die Funktion $\exp : L(\mathbb{K}^n) \to L(\mathbb{K}^n)$ *ist stetig.*

(c) Es ist $e^0 = I$*, und für* $AB = BA$ *ist* $e^A e^B = e^{A+B}$*.*

(d) Für alle $C \in GL(\mathbb{K}^n)$ *ist* $Ce^AC^{-1} = e^{C^{-1}AC}$*.*

(e) Für alle $A \in L(\mathbb{K}^n)$ *ist* e^A *invertierbar und* $(e^A)^{-1} = e^{-A}$*.*

Beweis

(a) Sei B eine beschränkte Teilmenge von $L(\mathbb{K}^n)$ und $\|X\| \leq M$ für alle $X \in B$. Dann gilt für alle $X \in B$

$$\left\| \frac{1}{n!}X^n \right\| \leq \frac{1}{n!}\|X\|^n \leq \frac{1}{n!}M^n.$$

Die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ mit

$$f_n : B \to L(\mathbb{K}^n), \quad X \mapsto \frac{1}{n!}X^n$$

ist also auf B gleichmäßig konvergent, da ja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sup_{X \in B} \|f_n(X)\| \right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!} = e^M < \infty.$$

(b) Ist $B \subseteq L(\mathbb{K}^n)$ beschränkt, so folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz der Exponentialreihe und aus der Stetigkeit der Funktionen f_n die Stetigkeit von exp auf B. Da jeder Punkt $X_0 \in L(\mathbb{K}^n)$ eine beschränkte Umgebung besitzt, ist exp auf ganz $L(\mathbb{K}^n)$ stetig.

(c) Die Aussage $e^0 = I$ ist klar. Gilt $AB = BA$, so ist

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k},$$

und mit der Cauchyschen Produktformel erhalten wir

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(A+B)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \frac{B^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^j}{j!} = e^A e^B. \end{aligned}$$

(d) Für $A \in L(\mathbb{K}^n)$ und $C \in GL(\mathbb{K}^n)$ ist $C^{-1}A^nC = (C^{-1}AC)^n$, und aus der Stetigkeit der Matrixmultiplikation folgt

$$\begin{aligned} C^{-1}e^AC &= C^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} CA^nC = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} C^{-1}A^nC \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(C^{-1}AC)^n = e^{C^{-1}AC}. \end{aligned}$$

(e) Nach (c) ist $e^Ae^{-A} = I$. Also ist e^A invertierbar und $(e^A)^{-1} = e^{-A}$. ■

Beispiel (A) Für Diagonalmatrizen

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \quad \text{ist} \quad D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^k \end{pmatrix}$$

und daher $e^D = \begin{pmatrix} e^{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{d_n} \end{pmatrix}$.

Beispiel (B) Für die Matrix

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ist} \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{u.s.w.}$$

und schließlich $N^n = 0$. Man erhält hieraus die Formel

$$e^{tN} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(tN)^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}(tN)^k = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & 1 & t & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & & & & t \\ 0 & & & 1 & \end{pmatrix}.$$

Beispielsweise hat man für

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{den Wert} \quad e^{tN} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beispiel (C) Für Blockdiagonalmatrizen $A = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$ gilt

$$A^n = \begin{pmatrix} B_1^n & 0 \\ 0 & B_2^n \end{pmatrix}$$

und daher

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{B_1} & 0 \\ 0 & e^{B_2} \end{pmatrix}.$$

Beispiel (D) Für das „Jordankästchen“

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

ist $A = \lambda I + N$ mit N wie in Beispiel (B). Wegen $(\lambda I)N = N(\lambda I)$ gilt also

$$e^A = e^{\lambda I} e^N = e^{\lambda} e^N.$$

■

Die Berechnung von e^A ist also dann einfach, wenn A in Jordan-Normalform vorliegt, also folgende Form hat:

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_r \end{pmatrix},$$

wobei jedes J_i ein Jordankästchen wie in Beispiel (D) ist. Wegen Satz 4.1 (d) läßt sich der allgemeine Fall stets auf diesen „Jordanfall“ zurückführen. Die vorherige Bestimmung der Jordan-Normalform ist aber nicht in jedem Fall erforderlich.

Beispiel (E) Für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ist $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und damit

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(tA)^n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} t^{2m} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} t^{2m+1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & 0 \\ 0 & \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sin t \\ -\sin t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

■

4.2 Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Für die Matrixexponentialfunktion haben wir die folgende Differenzierbarkeitseigenschaft:

Lemma 4.2 *Die Abbildung* $\exp : L(\mathbb{K}^n) \to L(\mathbb{K}^n)$ *ist in* $0 \in L(\mathbb{K}^n)$ *differenzierbar, und ihre Ableitung in diesem Punkt ist die identische Abbildung auf* $L(\mathbb{K}^n)$.

Beweis Aus $\exp X = e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n$ folgt

$$\|e^X - I - X\| = \|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n\| \le \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \|X\|^n = e^{\|X\|} - 1 - \|X\|.$$

Nach de l'Hospital ist

$$\lim_{X\to 0} \frac{e^{\|X\|} - 1 - \|X\|}{\|X\|} = \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1 - t}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{1} = 0$$

Folglich ist auch $\lim_{X\to 0} \frac{\|e^X - I - X\|}{\|X\|} = 0$, und wir haben

$$\exp X = \exp 0 + X + r(X) \quad \text{mit} \quad \lim_{X\to 0} \frac{\|r(X)\|}{\|X\|} = 0.$$

■

Sei nun $A \in L(\mathbb{K}^n)$. Wir betrachten die Funktion

$$\phi_A : \mathbb{R} \to L(\mathbb{K}^n), \quad t \mapsto \exp(tA).$$

Wegen Satz 4.1(c) gilt

$$\phi_A(s)\phi_A(t) = \phi_A(s+t) \quad \text{für alle} \quad s, t \in \mathbb{R},$$

und aus Lemma 4.2 und der Kettenregel folgt

$$\phi_A'(0) = \exp'(0)A = A.$$

Damit ist für $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \phi'_A(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{\phi_A(t+h)-\phi_A(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\phi_A(h)\phi_A(t)-\phi_A(t)}{h} \\ &= \left(\lim_{h\to 0} \frac{\phi_A(h)-I}{h}\right)\phi_A(t) = \phi'_A(0)\phi_A(t) = A\phi_A(t). \end{aligned}$$

Fassen wir zusammen:

Satz 4.3 *Sei $A \in L(\mathbb{K}^n)$. Dann bilden die Spalten von ϕ_A ein Fundamentalsystem der homogenen linearen Differentialgleichungen $y' = Ay$ mit konstanten Koeffizienten.*

Beweis In der Tat, wir haben oben gesehen, dass die Spalten von ϕ_A Lösungen von $y' = Ay$ sind, und diese Spalten sind linear unabhängig, da $\phi_A(t)$ für jedes t invertierbar ist.
∎

Mit dieser expliziten Darstellung der Lösung der homogenen Gleichung und Satz 3.6 über die Variation der Konstanten erhalten wir folgendes Resultat über die Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.

Satz 4.4 *Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Interval und $b : I \to \mathbb{K}^n$ stetig, so erhält man eine Lösung $\psi : I \to \mathbb{K}^n$ der inhomogenen Gleichung $y' = Ay + b(x)$ durch den Ansatz $\psi(x) = e^{xA}c(x)$ mit*

$$c(x) = c(x_0) + \int_{x_0}^{x} e^{-tA} b(t)\,dt \quad \text{mit} \quad x_0 \in I.$$

Damit ist

$$\psi(x) = e^{xA}c(x_0) + \int_{x_0}^{x} e^{(x-t)A} b(t)\,dt. \tag{4.2}$$

Beispiel Gesucht ist die Lösung des Differentialgleichungssystems

$$y_1' = y_2 + 1; \qquad y_2' = -y_1 \qquad \text{mit} \quad y_1(0) = y_2(0) = 1$$

bzw.

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

In Beispiel E aus Abschnitt 4.1 haben wir bereits für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$e^{xA} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

gefunden, und aus (4.2) erhalten wir mit $x_0 = 0$ und $c(x_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} y(x) &= \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} \cos(x-t) & \sin(x-t) \\ -\sin(x-t) & \cos(x-t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= \begin{pmatrix} \cos x + \sin x \\ \cos x - \sin x \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} \cos(x-t) \\ -\sin(x-t) \end{pmatrix} dt \\ &= \begin{pmatrix} \cos x + \sin x \\ \cos x - \sin x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin(x-t) \\ -\cos(x-t) \end{pmatrix} \Bigg|_0^x \\ &= \begin{pmatrix} \cos x + \sin x \\ \cos x - \sin x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\sin x \\ -\cos x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos x + 2\sin x \\ 2\cos x - \sin x - 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

■

Wir sehen uns nun systematisch die homogene lineare Differentialgleichung

$$y' = Ay \quad \text{mit} \quad A \in GL(\mathbb{R}^2) \tag{4.3}$$

an und wollen insbesondere versuchen, uns eine Vorstellung vom Verhalten der Lösungen zu verschaffen. Dabei treten im wesentlichen drei Fälle auf.

Fall 1 Die Matrix A ist reell diagonalisierbar mit Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Sind a_1, a_2 die zu diesen Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren, so bilden die Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x} a_1, \quad \varphi_2(x) = e^{\lambda_2 x} a_2$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen von (4.3). Es ist ja z.B.

$$\varphi_1'(x) = e^{\lambda_1 x}\lambda_1 a_1 = e^{\lambda_1 x} A a_1 = A e^{\lambda_1 x} a_1 = A\varphi_1.$$

Betrachten wir speziell die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

(auf die sich der allgemeine Fall durch Rotation zurückführen läßt). Die Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ_1, λ_2 können als

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gewählt werden, so dass die allgemeine Lösung φ von (4.3) in diesem Fall gegeben ist durch

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 x} \\ c_2 e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

Da es in der Regel nicht einfach ist, sich den Graphen der Lösungsfunktion (also eine Menge im $\mathbb{R}^3$) vorzustellen, versucht man, sich eine Vorstellung vom qualitativen Lösungsverhalten zu verschaffen, indem man (4.4) als Parameterdarstellung einer Kurve im $\mathbb{R}^2$ interpretiert. Solche Lösungskurven heißen auch *Phasenkurven* oder *Trajektorien* der Gleichung (4.3), und Diagramme, die mehrerer solcher Trajektorien enthalten und so Aufschluß über das Lösungsverhalten geben, heißen *Phasenporträts.* Die Trajektorien werden durch Übertragen der üblichen Orientierung von $\mathbb{R}$ orientiert. Wir bezeichnen die Koordinaten in $\mathbb{R}^2$ mit (z_1, z_2). Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \lambda_1 > \lambda_2 > 0$$

erhält man aus (4.4) für $c_1 \neq 0$ beispielsweise

$$z_2 = c_2 e^{\lambda_2 x} = c_2 (e^{\lambda_1 x})^{\lambda_2/\lambda_1} = c z_1^{\lambda_2/\lambda_1}$$

mit einer Konstanten c, und man erhält durch Variation von c das folgende Phasenporträt:

während man beispielsweise für $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ bzw. $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ die folgenden Phasenporträts findet:

Eine Vorzeichenumkehr bei λ_1 und λ_2 liefert ähnliche Phasenporträts mit umgekehrten Orientierungen.

Fall 2 Die Matrix A besitzt keine reellen Eigenwerte. Dann hat sie zwei konjugiert-komplexe Eigenwerte, etwa

$$\lambda_1 = \mu + i\omega \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \mu - i\omega \quad \text{mit} \quad \mu \in \mathbb{R}, \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Seien $a_1, a_2 \in \mathbb{C}^2$ die zugehörigen Eigenvektoren, die wir auch in Real- und Imaginärteil zerlegen:

$$a_1 = b + ic \quad \text{und} \quad a_2 = b - ic \quad \text{mit} \quad b, c \in \mathbb{R}^2.$$

Wie im Fall 1 bekommt man dann komplexe Fundamentallösungen

$$\begin{aligned} \varphi_j(x) &= e^{xA} a_j = e^{x\lambda_j} a_j = e^{x\mu}(e^{\pm ix\omega} \cdot b \pm e^{\pm ix\omega} \cdot c) \\ &= e^{x\mu}(\cos x\omega \cdot b - \sin x\omega \cdot c) \pm ie^{x\mu}(\sin x\omega \cdot b + \cos x\omega \cdot c). \end{aligned}$$

Wir beachten, dass $\varphi_1 = \overline{\varphi_2}$, und bekommen dann aus den komplexen Fundamentallösungen die reellen Fundamentallösungen

$$\psi_1 = \text{Re } \varphi_1 = \text{Re } \varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \quad \text{und} \quad \psi_2 = \text{Im } \varphi_1 = -\text{Im } \varphi_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2i},$$

d.h.

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= e^{x\mu}(\cos x\omega \cdot b - \sin x\omega \cdot c), \\ \psi_2(x) &= e^{x\mu}(\sin x\omega \cdot b + \cos x\omega \cdot c). \end{aligned}$$

Wir sehen uns die Trajektorien speziell für die Matrix $A = \begin{pmatrix} \mu & \omega \\ -\omega & \mu \end{pmatrix}$ an. In diesem Fall ist mit $\lambda_1 = \mu + i\omega$ und $\lambda_2 = \mu - i\omega$

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad \text{d.h.} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und die reellen Fundamentallösungen sind

$$\psi_1(x) = e^{x\mu} \begin{pmatrix} \cos x\omega \\ -\sin x\omega \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \psi_2(x) = e^{x\mu} \begin{pmatrix} \sin x\omega \\ \cos x\omega \end{pmatrix}$$

Wir erhalten als Phasenporträts für $\mu = 0$ und $\omega > 0$ bzw. für $\mu, \omega > 0$

Umkehr der Vorzeichen führt wieder zur Umkehr der Orientierungen.

Fall 3 Die Matrix A hat einen reellen Eigenwert und einen eindimensionalen Eigenraum. Dann hat A die Jordansche Normalform

$$B = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

mit einer invertierbaren Matrix $S \in L(\mathbb{R}^2)$. Durch die Substitution $\omega := S^{-1}y$ erhalten wir die Differentialgleichung $\omega' = B\omega$. Wegen

$$\begin{aligned} e^{xB} &= \exp\left(x\left[\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]\right) \\ &= e^{x\lambda}\exp\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e^{x\lambda}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bilden die Funktionen

$$\psi_1(x) = e^{\lambda x}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \psi_2(x) = e^{\lambda x}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Lösungsfundamentalsystem von $\omega' = B\omega$ mit $\psi_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\psi_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Funktionen $\varphi_j(x) := S\psi_j(x)$ bilden dann ein Fundamentalsystem der ursprünglichen Gleichung $y' = Ay$. Die Phasenporträts für die Matrix $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ sehen für $\lambda = 0$ bzw. $\lambda > 0$ wie folgt aus:

Für $\lambda < 0$ kommt es wieder zu einer Orientierungsumkehr in III b.

Anmerkung Es bietet sich an, hier einige Anmerkungen zur allgemeinen Stabilitätstheorie für Differentialgleichungen folgen zu lassen. Dazu seien $F, G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Funktionen mit stetigen partiellen Ableitungen, und wir betrachten das System von Differentialgleichungen

$$\dot{x} = F(x, y), \qquad \dot{y} = G(x, y). \tag{4.5}$$

Solche Systeme, bei denen die unabhängige Variable t nicht explizit auftritt, heissen *autonom* – ein Beispiel sind die homogenen linearen Systeme mit konstanten Koeffizienten. Für beliebige Werte $t_0, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ besitzt dann die Anfangswertaufgabe

$$\dot{x} = F(x, y), \quad \dot{y} = G(x, y), \quad x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0 \tag{4.6}$$

genau eine Lösung, von der wir der Einfachheit halber annehmen, dass sie auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist. Diese Lösung betrachten wir wie oben als Parameterdarstellung einer Kurve im $\mathbb{R}^2$, der *Lösungstrajektorie.* Wir überlegen uns, dass durch jeden Punkt $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ genau eine Trajektorie verläuft. Seien dazu $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}$ Lösungen des autonomen Systems (4.5), deren Trajektorien beide durch den Punkt $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ verlaufen. Es gibt also $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{x}(t_1) \\ \overline{y}(t_1) \end{pmatrix}.$$

Dann sind - wie man leicht nachrechnet - die Funktionen

$$\widetilde{x}(t) := \overline{x}(t - t_0 + t_1), \quad \widetilde{y}(t) := \overline{y}(t - t_0 + t_1)$$

ebenfalls Lösungen der Anfangswertaufgabe (4.6). Da diese eindeutig bestimmt sind, folgt

$$x(t) = \overline{x}(t - t_0 + t_1) \quad \text{und} \quad y(t) = \overline{y}(t - t_0 + t_1)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Damit ist klar, dass $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}$ die gleiche Trajektorie beschreiben.

Gilt für einen Punkt $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, dass

$$F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0,$$

so ist offenbar $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ eine Lösung von (4.5), und zwar die einzige Lösung, die den Wert $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ annimmt. Die Trajektorie durch diesen Punkt $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ schrumpft daher auf einen einzigen Punkt $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ zusammen. Solche Lösungen von (4.5) heißen *stationär*, und $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ heißt dann ein *Gleichgewichtspunkt* von (4.5). Für die oben betrachteten homogenen linearen Systeme ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ stets ein Gleichgewichtspunkt. Für diese Systeme konnten wir auch typische Verhaltensmuster der Trajektorien feststellen. So streben bei Ia und Ib alle nichtstationären Lösungen weg vom Gleichgewichtspunkt oder (nach Vorzeichenwechsel) hin zum Gleichgewichtspunkt, und in IIa bleiben die Trajektorien in einer Umgebung des Gleichgewichtspunktes, ohne sich jedoch weiter zu nähern oder zu entfernen. Wir fixieren dieses Verhalten in folgender Definition.

Definition 4.5 *Sei* $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ *ein Gleichgewichtspunkt des autonomen Systems* (4.5). *Dann heißt dieser Punkt* (*a*) stabil, *wenn für jedes* $\varepsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *mit folgender Eigenschaft existiert: Gilt für eine Lösung* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *von* (4.5) *und für ein* $t_1 \in \mathbb{R}$, *dass*

$$\left\| \begin{pmatrix} x(t_1) \\ y(t_1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\|_2 < \delta,$$

so ist

$$\left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\|_2 < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad t \geq t_1.$$

(*b*) asymptotisch stabil, *wenn er stabil ist und darüber hinaus ein* $R > 0$ *mit folgender Eigenschaft existiert: Gilt für eine Lösung* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *von* (4.5) *und für ein* $t_1 \in \mathbb{R}$ *die Ungleichung*

$$\left\| \begin{pmatrix} x(t_1) \\ y(t_1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\|_2 < R,$$

so konvergiert $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ *für* $t \to \infty$ *gegen* $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

(*c*) instabil, *wenn er nicht stabil ist.*

Im Fall IIa beobachten wir ein stabiles (aber kein asymptotisch stabiles) Verhalten, während im Fall IIb $\mu < 0$ (Orientierungsumkehr) asymptotisch stabiles Verhalten vorliegt. Eine genauere Analyse der Fälle I-III zeigt:

Satz 4.6 *Sei* $A \in L(\mathbb{R}^2)$. *Dann ist der Gleichgewichtspunkt* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *des Systems* $y' = Ay$ *genau dann asymptotisch stabil, wenn jeder Eigenwert von* A *einen negativen Realteil besitzt.*

Zum Überprüfen der Stabilitätseigenschaften allgemeiner Systeme steht die Methode der Lyapunov-Funktionen (vgl. Heuser, Abschnitt X, Nr. 67) zur Verfügung.

Eine praktisch interessante Frage ist auch die nach periodischen Lösungen von (4.5), d.h. nach solchen, zu denen es ein $T > 0$ gibt mit

$$x(t+T) = x(t) \quad \text{und} \quad y(t+T) = y(t) \quad \text{für alle } t.$$

Die Trajektorien solcher Lösungen sind geschlossene Kurven, sogenannte Zyklen (vgl. Fall IIa). Sehen wir uns ein weiteres Beispiel an. Das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= x + y(1 - x^2 - y^2) \end{aligned}$$

hat $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ als einzigen Gleichgewichtspunkt. Zur Lösung dieses Systems gehen wir zu Polarkoordinaten über, d.h. wir schreiben $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ und erhalten mit

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \quad \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi$$

nach einigen Umformungen das System

$$\dot{r} = r(1 - r^2), \quad \dot{\varphi} = 1,$$

dessen Lösung für $r > 0$ durch

$$r(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + ae^{-2t}}}, \quad \varphi(t) = t + b \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}$$

gegeben ist. Für $a = 0$ erhält man den Einheitskreis als Trajektorie, und für $a < 0$ bzw. $a > 0$ bekommt man Kurven, die sich für $t \to \infty$ spiralförmig von außen oder innen dem Einheitskreis anschmiegen.

Das beobachtete Verhalten ist charakteristisch.

Satz 4.7 *Jeder Zyklus des Systems* (4.5) *umschließt mindestens einen Gleichgewichtspunkt.*

Satz 4.8 (Poincaré-Bendixon) *Sei B die Abschließung einer offenen, beschränkten und zusammenhängenden Teilmenge des $\mathbb{R}^2$, und*

$$T : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

sei eine Trajektorie von (4.5), die für alle $t \geq t_0$ in B verläuft. Dann ist T entweder selbst ein Zyklus, oder T schmiegt sich für $t \to \infty$ spiralförmig von innen oder außen einem Zyklus in B an.

Wenn B also eine "Halbtrajektorie" enthält, so gibt es in B einen Zyklus. Hinweise zu den Beweisen finden Sie in Heuser, Abschnitt X, Nr. 68. ∎

4.3 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Für lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten, die in vielen Anwendungen auftreten, gibt es eine elegante Lösungstheorie, die die Bestimmung der Lösungen auf die Bestimmungen der Nullstellen eines Polynoms reduziert.

4.3.1 Polynome von Differentialoperatoren

Wir schreiben $\mathbb{C}[X]$ für die Menge der Polynome in einer Unbestimmten X, d.h. die Elemente von $\mathbb{C}[X]$ sind Ausdrücke der Gestalt

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \tag{4.7}$$

mit komplexen Koeffizienten a_k. Ersetzt man hierin die Unbestimmte X durch den Ableitungsoperator $D := \frac{d}{dx}$, so erhält man einen sogenannten *Differentialoperator*

$$P(D) = a_0 I + a_1 D + \cdots + a_n D^n.$$

Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, so ordnet $P(D)$ jeder n-mal differenzierbaren Funktion $y : I \to \mathbb{C}$ die Funktion

$$P(D)y = a_0 I y + a_1 D y + \cdots + a_n D^n y = a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_n y^{(n)}$$

zu, so dass wir die lineare Differentialgleichung n. Ordnung mit konstanten Koeffizienten,

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad \text{mit } a_n \neq 0 \tag{4.8}$$

auch als $P(D)y = 0$ schreiben können mit $P \in \mathbb{C}[X]$ wie in (4.7). Das Polynom P heißt dann auch das *charakteristische Polynom* der Gleichung (4.8). Wir sehen uns zunächst an, wie man mit Differentialoperatoren rechnet.

Lemma 4.9 *Seien $P_1, P_2 \in \mathbb{C}[X]$ Polynome vom Grad n bzw. m.*

(a) *Ist $P(X) := P_1(X) + P_2(X)$ und f $\max(m,n)$-mal differenzierbar, so ist*

$$P(D)f = P_1(D)f + P_2(D)f.$$

(b) *Ist $P(X) := P_1(X)P_2(X)$ und f $(m+n)$-mal differenzierbar, so ist*

$$P(D)f = P_1(D)(P_2(D)f).$$

Man rechnet mit Differentialoperatoren also genauso wie mit den zugehörigen Polynomen. Insbesondere folgt aus (b), dass

$$P_1(D)P_2(D)f = P_2(D)P_1(D)f$$

(was für Differentialoperatoren der Gestalt $a_nD^n + \cdots + a_1D + a_0I$ mit *nicht-konstanten* Koeffizienten i.a. nicht mehr gilt).

Beweis von Lemma 4.9 Aussage (a) folgt sofort daraus, dass

$$P(D)f = a_0f + a_1Df + \cdots + a_nD^nf = a_0f + a_1f' + \cdots + a_nf^{(n)}$$

linear von den Koeffizienten a_j abhängt. Für (b) seien

$$P_1(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \quad \text{und} \quad P_2(X) = b_0 + b_1X + \cdots + b_mX^m.$$

Dann ist

$$P(X) = \sum_{j=0}^{n+m} c_jX^j \quad \text{mit} \quad c_j = \sum_{k+l=j} a_kb_l,$$

wobei wir $a_k = 0$ für $k > n$ und $b_l = 0$ für $l > m$ setzen. Daher ergibt sich

$$\begin{aligned} P(D)f &= \sum_{j=0}^{n+m} \sum_{k+l=j} a_kb_lD^jf = \sum_{j=0}^{n+m} \sum_{k+l=j} a_kb_lD^{k+l}f \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{m} a_kD^k(b_lD^lf) = \sum_{k=0}^{n} a_kD^k \sum_{l=0}^{m} b_lD^lf = P_1(D)(P_2(D)f). \end{aligned}$$

■

Aus dem Fundamentalsatz der Algebra (den wir in der Vorlesung zur Funktionentheorie beweisen werden), wissen wir, dass sich jedes Polynom

$$P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$$

vom Grad $n \geq 1$ mit komplexen Koeffizienten auf eindeutige Weise in Linearfaktoren zerlegen lässt:

$$P(X) = (X - \lambda_1)^{k_1} \cdot \cdots \cdot (X - \lambda_r)^{k_r}, \tag{4.9}$$

wobei die λ_i die paarweise verschiedenen komplexen Nullstellen von P sind. Die positiven natürlichen Zahlen k_i heißen die *Vielfachheiten* der Nullstellen λ_i. Offenbar ist $k_1 + \cdots + k_r = n$. Weiter wissen wir aus dem Satz über die Partialbruchzerlegung (vgl. Analysis II, Satz 8.38), dass es Polynome $Q_1(X), \ldots, Q_r(X)$ so gibt, dass

$$\frac{1}{P(X)} = \frac{Q_1(X)}{(X - \lambda_1)^{k_1}} + \cdots + \frac{Q_r(X)}{(X - \lambda_r)^{k_r}}. \tag{4.10}$$

Definieren wir für $1 \leq k \leq r$

$$P_k(X) := \prod_{l=1, l\neq k}^{r} (X - \lambda_l)^{k_l}, \tag{4.11}$$

so folgt aus (4.10) nach Multiplikation mit $P(X)$ und unter Beachtung von (4.9), dass

$$1 = P_1(X)Q_1(X) + \cdots + P_r(X)Q_r(X). \tag{4.12}$$

Wegen Lemma 4.9 übertragen sich (4.9) und (4.12) auch auf die entsprechenden Differentialoperatoren:

$$P(D) = (D - \lambda_1 I)^{k_1} \cdot \cdots \cdot (D - \lambda_r I)^{k_r}, \tag{4.13}$$

$$I = P_1(D)Q_1(D) + \cdots + P_r(D)Q_r(D). \tag{4.14}$$

Besonders einfach ist die Wirkung der Differentialoperatoren $P(D)$ auf Exponentialfunktionen. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ sei $e_\lambda(x) := e^{\lambda x}$.

Lemma 4.10 (a) *Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $P(D)e_\lambda = P(\lambda)e_\lambda$.*

(b) *Sei $k \in \mathbb{N}$, f k-mal differenzierbar und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann ist*

$$D^k(e_\lambda f) = e_\lambda (D + \lambda I)^k f. \tag{4.15}$$

Beweis

(a) Dies folgt sofort aus

$$\begin{aligned} P(D)e^{\lambda x} &= a_0 e^{\lambda x} + a_1 (e^{\lambda x})' + \cdots + a_n (e^{\lambda x})^{(n)} \\ &= a_0 e^{\lambda x} + a_1 \lambda e^{\lambda x} + \cdots + a_n \lambda^n e^{\lambda x} = P(\lambda) e^{\lambda x}. \end{aligned}$$

(b) Mit der Leibnizschen Produktregel erhalten wir

$$\begin{aligned} D^k(e_\lambda f) &= \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (D^l e_\lambda)(D^{k-l} f) \\ &= \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \lambda^l e_\lambda (D^{k-l} f) \\ &= e_\lambda \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \lambda^l D^{k-l} f = e_\lambda (D + \lambda I)^k f. \end{aligned}$$

∎

4.3.2 Die homogene Gleichung

Satz 4.11 *Das Polynom*

$$P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \quad \in \mathbb{C}[X]$$

habe die paarweise verschiedenen komplexen Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ *mit den entsprechenden Vielfachheiten* $k_1, \ldots, k_r$. *Dann hat die Differentialgleichung*

$$P(D)y = 0 \tag{4.16}$$

ein Lösungsfundamentalsystem, bestehend aus allen Funktionen

$$\varphi_{jm}(x) = x^m e^{\lambda_j x} \quad \textit{mit} \quad 1 \le j \le r \quad \textit{und} \quad 0 \le m \le k_j - 1. \tag{4.17}$$

Beweis Die Bezeichnungen P_j, Q_j seien wie im vorigen Unterabschnitt. Zuerst zeigen wir: Ist y eine Lösung von (4.16), so ist für jedes $j \in \{1, \ldots, r\}$ die Funktion $y_j := P_j(D)Q_j(D)y$ eine Lösung der Gleichung

$$(D - \lambda_j I)^{k_j} y_j = 0. \tag{4.18}$$

In der Tat, dies folgt sofort aus

$$\begin{aligned} (D - \lambda_j I)^{k_j} y_j &= (D - \lambda_j I)^{k_j} P_j(D) Q_j(D) y \\ &= P(D)Q_j(D)y = Q_j(D)P(D)y = 0. \end{aligned}$$

Ist umgekehrt y_j eine Lösung von (4.18), so ist y_j auch Lösung von (4.16):

$$P(D)y_j = P_j(D)(D - \lambda_j I)^{k_j} y_j = 0.$$

Da außerdem für jede Lösung y von (4.16) wegen (4.14) gilt

$$y = Iy = (P_1(D)Q_1(D)y + \cdots + P_r(D)Q_r(D))y = y_1 + \cdots + y_r,$$

erhalten wir: Jede Lösung von (4.16) läßt sich schreiben als Summe von Lösungen der Gleichungen (4.18) für $j = 1, \ldots, r$. Umgekehrt ist jede solche Summe eine Lösung von (4.16).

Wir haben also noch (4.18) zu lösen. Wegen (4.15) können wir diese Gleichung schreiben als

$$e_{\lambda_j} D^{k_j} e_{-\lambda_j} y_j = 0,$$

und wegen $e_{\lambda_j}(x) \neq 0$ für alle x ist y_i genau dann eine Lösung dieser Gleichung, wenn y_i die folgende Gleichung löst:

$$D^{k_j} e_{-\lambda_j} y_j = 0. \tag{4.19}$$

Offenbar ist nun y_j genau dann eine Lösung von (4.19), wenn $e_{-\lambda_j} y_j$ ein Polynom vom Grad $\le k_j - 1$ ist, d.h. die Lösungen von (4.19) sind genau die Funktionen der Gestalt

$$y_j(x) = (c_0 + c_1 x + \cdots + c_{k_j - 1} x^{k_j - 1}) e^{\lambda_j x}$$

mit $c_0, \ldots, c_{k_j - 1} \in \mathbb{C}$.

Damit ist klar: Jede Funktion aus (4.17) löst (4.16), und jede Lösung von (4.16) läßt sich als Linearkombination von Funktionen aus (4.17) schreiben. Da in (4.17) genau $k_1 + \cdots + k_r = n$ Funktionen stehen, bilden diese eine Basis des Lösungsraumes von (4.16). ∎

Anmerkung 1 Hat das Polynom P in Satz 4.11 nur einfache Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, so besteht ein Lösungsfundamentalsystem von (4.16) aus den Funktionen

$$x \mapsto e^{\lambda_j x} \quad \text{mit} \quad j = 1, \ldots, n.$$

∎

Anmerkung 2 Sind alle Koeffizienten des Polynoms P aus Satz 4.11 reell, so treten seine nichtreellen Nullstellen als konjugiert komplexe Paare auf. Mit

$$e^{\lambda_j x}, xe^{\lambda_j x}, \ldots, x^{k_j - 1} e^{\lambda_j x} \tag{4.20}$$

gehören also auch

$$e^{\overline{\lambda}_j x}, xe^{\overline{\lambda}_j x}, \ldots, x^{k_j - 1} e^{\overline{\lambda}_j x} \tag{4.21}$$

zum Lösungsfundamentalsystem (4.17). Wir können daher die Funktionen aus (4.20) und (4.21) durch ihre Real- und Imaginärteile ersetzen und erhalten ein Fundamentalsystem, das aus reellwertigen Funktionen besteht.

Dazu schreiben wir $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ mit $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$ und $\beta_j \neq 0$ und bekommen

$$\begin{aligned} x^m e^{\lambda_j x} &= x^m e^{\alpha_j x} e^{\beta_j x i} \\ &= x^m e^{\alpha_j x} (\cos \beta_j x + i \sin \beta_j x). \end{aligned}$$

Unter den getroffenen Annahmen bilden also die Funktionen

$$e^{\lambda_j x}, xe^{\lambda_j x}, \ldots, x^{k_j - 1} e^{\lambda_j x}$$

für jede k_j-fache reelle Nullstelle λ_j von P und

$$e^{\alpha_j x} \cos \beta_j x, xe^{\alpha_j x} \cos \beta_j x, \ldots, x^{k_j - 1} e^{\alpha_j x} \cos \beta_j x,$$

$$e^{\alpha_j x} \sin \beta_j x, xe^{\alpha_j x} \sin \beta_j x, \ldots, x^{k_j - 1} e^{\alpha_j x} \sin \beta_j x,$$

für jedes Paar $(\lambda_j, \overline{\lambda}_j)$ k_j-facher Nullstellen $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ mit $\beta_j > 0$ ein Lösungsfundamentalsystem von (4.16). ∎

Beispiel A Die Differentialgleichung

$$y''' - y'' - 2y' = 0$$

läßt sich schreiben als $P(D) = 0$ mit $P(X) = X^3 - X^2 - 2X$. Die Nullstellen des Polynoms P sind $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = 2$. Die Funktionen

$$\varphi_1(x) = 1, \quad \varphi_2(x) = e^{-x} \quad \text{und} \quad \varphi_3(x) = e^{2x}$$

bilden also ein Lösungsfundamentalsystem, und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung hat die Gestalt

$$\varphi(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} \quad \text{mit} \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

■

Beispiel B Die Differentialgleichung

$$y''' - 2y'' + y' = 0$$

hat das charakteristische Polynom $P(X) = X^3 - 2X^2 + X$ mit der einfachen Nullstelle $\lambda_1 = 0$ und der doppelten Nullstelle $\lambda_2 = 1$. Ein Lösungsfundamentalsystem wird also gebildet von den Funktionen

$$\varphi_1(x) = 1, \quad \varphi_2(x) = e^{x} \quad \text{und} \quad \varphi_3(x) = xe^{x},$$

und die allgemeine Lösung lautet

$$\varphi(x) = C_1 + (C_2 + C_3 x)e^{x} \quad \text{mit } C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

■

Beispiel C Wir betrachten das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + dy \end{aligned} \quad \text{mit } x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0 \tag{4.22}$$

mit reellen Koeffizienten. Ist $b = 0$, so kann man zunächst x bestimmen als Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x} = ax \quad \text{mit } x(t_0) = x_0$$

und dann die gefundene Lösung einsetzen in die zweite Gleichung von (4.22), wodurch diese zu einer inhomogenen Gleichung wird:

$$\dot{y} - dy = cx \quad \text{mit } y(t_0) = y_0.$$

Für $b \neq 0$ erhalten wir aus der ersten Gleichung von (4.22)

$$y = \frac{1}{b}(\dot{x} - ax)$$

und nach Differenzieren

$$\dot{y} = \frac{1}{b}(\ddot{x} - a\dot{x}).$$

Setzen wir dies in die zweite Gleichung von (4.22) ein, so folgt

$$\frac{1}{b}(\ddot{x} - a\dot{x}) = cx + \frac{d}{b}(\dot{x} - ax),$$

d.h. wir erhalten die Gleichung 2. Ordnung

$$\ddot{x} - (a+d)\dot{x} + (ad - bc)x = 0$$

mit den Anfangsbedingungen $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = ax_0 + by_0$. Dies löst man wie oben beschrieben und berechnet abschließend y aus x. Dieses *Eliminationsverfahren* ist oft nützlich bei der Lösung von Differentialgleichungssystemen.

Beispiel D Das charakteristische Polynom der Schwingungsgleichung

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad \text{mit } \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

lautet $P(X) = X^2 + \omega^2$ und hat die Nullstellen

$$\lambda_1 = i\omega, \quad \lambda_2 = -i\omega.$$

Also bilden die Funktionen

$$\varphi_1(x) = e^{i\omega x}, \quad \varphi_2(x) = e^{-i\omega x}$$

ein Fundamentalsystem, und die Funktionen

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2}(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) = \cos\omega x, \quad \psi_2(x) = \frac{1}{2i}(\varphi_1(x) - \varphi_2(x)) = \sin\omega x$$

bilden ein Fundamentalsystem, das aus reellwertigen Funktionen besteht. ■

Beispiel E Wir betrachten allgemeiner die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{mit } \mu \geq 0, \omega_0 > 0$$

der *gedämpften Schwingung.* Diese Gleichung modelliert z.B. eine Masse, die an einer Feder schwingt, wobei μ der Reibungskoeffizient und ω_0^2 die Federkonstante ist. Für $\mu = 0$ hat diese Gleichung laut Beispiel D das Lösungsfundamentalsystem

$$\varphi_1(t) = \cos\omega_0 t, \quad \varphi_2(t) = \sin\omega_0 t.$$

Die Zahl ω_0 ist also die Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung. Wir setzen von nun an $\mu > 0$ voraus.

Wir schreiben die Differentialgleichung als

$$P(D)x = 0 \quad \text{mit } P(D) = D^2 + 2\mu D + \omega_0^2 I,$$

wobei D nun für $\frac{d}{dt}$ steht. Die Nullstellen von

$$P(X) = X^2 + 2\mu X + \omega_0^2 = (X + \mu)^2 + \omega_0^2 - \mu^2$$

sind

$$\lambda_1 = -\mu + \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}, \quad \lambda_2 = -\mu - \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2},$$

wobei $\sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}$ im Fall $\mu^2 < \omega_0^2$ für $i\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}$ steht.

Fall 1: $0 < \mu < \omega_0$ **(Schwache Dämpfung)** In diesem Fall setzen wir $\omega := \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}$ und erhalten die konjugiert-komplexen Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = -\mu \pm i\omega.$$

Also haben wir ein Lösungsfundamentalsystem

$$\varphi_1(t) = e^{-\mu t} e^{i\omega t}, \quad \varphi_2(t) = e^{-\mu t} e^{-i\omega t},$$

aus dem wir das folgende reellwertige Fundamentalsystem erhalten:

$$\psi_1(x) = e^{-\mu t} \cos \omega t, \quad \psi_2(x) = e^{-\mu t} \sin \omega t.$$

Durch die Dämpfung wird also die Frequenz kleiner, und die Lösungen klingen exponentiell ab.

Fall 2: $\mu = \omega_0$ **(aperiodischer Grenzfall)** In diesem Fall ist $\lambda = -\mu$ eine doppelte Nullstelle, so dass wir das Lösungsfundamentalsystem

$$\varphi_1(t) = e^{-\mu t}, \quad \varphi_2(t) = te^{-\mu t}$$

erhalten. Wir beobachten kein Schwingungsverhalten mehr.

Fall 3: $\mu > \omega_0$ **(aperiodischer Fall)** In diesem Fall haben wir zwei einfache reelle Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2},$$

die wegen $\sqrt{\mu^2 - \omega_0^2} < \mu$ beide negativ sind. Ein Lösungsfundamentalsystem ist also

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad \varphi_2(t) = e^{\lambda_2 t}$$

und die Lösungen klingen exponentiell ab. ∎

4.3.3 Die inhomogene Gleichung

Sei wieder $P(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 I$ ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten und $b : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Um die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$P(D)y = b(x) \tag{4.23}$$

zu finden, bestimmen wir zunächst mit Satz 4.11 ein Lösungsfundamentalsystem $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ der homogenen Gleichung, und dann benötigen wir noch eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Wir diskutieren kurz zwei Wege, wie man diese finden kann.

1. Weg: Variation der Konstanten Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $P(D)y = 0$ hat die Form

$$\varphi(x) = C_1\varphi_1(x) + \cdots + C_n\varphi_n(x)$$

mit Konstanten C_j, und wir suchen eine spezielle Lösung von (4.23) der Gestalt

$$\varphi(x) = C_1(x)\varphi_1(x) + \cdots + C_n(x)\varphi_n(x)$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $C_j(x)$. Wir berechnen die Ableitungen von φ:

$$\begin{aligned} \varphi' &= C_1'\varphi_1 + C_1\varphi_1 + \cdots + C_n'\varphi_n + C_n\varphi_n' \\ &= (C_1\varphi_1' + \cdots + C_n\varphi_n') + (C_1'\varphi_1 + \cdots + C_n'\varphi_n). \end{aligned}$$

Um die Rechnung einfach zu halten, versuchen wir, die C_j so zu wählen, dass

$$C_1'\varphi_1 + \cdots + C_n'\varphi_n = 0.$$

(Wir werden später sehen, dass dies möglich ist.) Dann bleibt also

$$\varphi' = C_1\varphi_1' + \cdots + C_n\varphi_n',$$

und wir finden weiter

$$\varphi'' = (C_1\varphi_1'' + \cdots + C_n\varphi_n'') + (C_1'\varphi_1' + \cdots + C_n'\varphi_n').$$

Wir fordern wieder

$$C_1'\varphi_1' + \cdots + C_n'\varphi_n' = 0.$$

Fahren wir so fort, so erhalten wir

$$\varphi^{(k)} = C_1\varphi_1^{(k)} + \cdots + C_n\varphi_n^{(k)} \quad \text{für } k = 0, \ldots, n-1$$

sowie die Bedingungen

$$C_1'\varphi_1^{(k)} + \cdots + C_n'\varphi_n^{(k)} = 0 \quad \text{für } k = 0, \ldots, n-2.$$

Schließlich erhalten wir für die n-te Ableitung

$$\varphi^{(n)} = (C_1\varphi_1^{(n)} + \cdots + C_n\varphi_n^{(n)}) + (C_1'\varphi_1^{(n-1)} + \cdots + C_n'\varphi_n^{(n-1)}).$$

Wir setzen diese Ausdrücke in die inhomogene Gleichung ein und bekommen

$$\begin{aligned} b &= \varphi^{(n)} + a_{n-1}\varphi^{(n-1)} + \ldots + a_1\varphi' + a_0\varphi \\ &= (C_1\varphi^{(n)} + \ldots + C_n\varphi_n^{(n)}) + (C_1'\varphi_1^{(n-1)} + \cdots + C_n'\varphi_n^{(n-1)}) \\ &\quad +a_{n-1}(C_1\varphi_1^{(n-1)} + \ldots + C_n\varphi_n^{(n-1)}) \\ &\quad +\ldots+ \\ &\quad +a_1(C_1\varphi_1' + \ldots + C_n\varphi_n') \\ &\quad +a_0(C_1\varphi_1 + \ldots + C_n\varphi_n), \end{aligned}$$

also

$$C_1'\varphi_1^{(n-1)} + \cdots + C_n'\varphi_n^{(n-1)} = b,$$

da die φ_j ja die homogene Gleichung $P(D)y = 0$ lösen. Zur Bestimmung der Ableitung C_j' haben wir damit das folgende lineare Gleichungssystem gewonnen:

$$\begin{aligned} C_1'\varphi_1 + \ldots + C_n'\varphi_n &= 0 \\ C_1'\varphi_1' + \ldots + C_n'\varphi_n' &= 0 \\ &\vdots \\ C_1'\varphi_1^{(n-2)} + \ldots + C_n'\varphi_n^{(n-2)} &= 0 \\ C_1'\varphi_1^{(n-1)} + \ldots + C_n'\varphi_n^{(n-1)} &= b \end{aligned} \tag{4.24}$$

Dieses System ist aber eindeutig lösbar! Die Determinante der Systemmatrix ist nämlich gerade die Wronski-Determinante des Fundamentalsystems $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, und diese Determinante ist ungleich Null nach Satz 3.7. Als Lösung des Systems (4.24) bekommen wir die Funktionen $C_1', \ldots, C_n'$, und hieraus erhalten wir durch Integration Funktionen $C_1, \ldots, C_n$. Man überzeugt sich leicht davon, dass dann die Funktion $\varphi = C_1\varphi_1 + \cdots + C_n\varphi_n$ tatsächlich eine Lösung von (4.23) ist.

Beispiel F Wir betrachten die Gleichung

$$y'' + 4y' = \cos 2x.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $y'' + 4y' = 0$ ist

$$\varphi(x) = C_1 + C_2e^{-4x}.$$

Wir suchen eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung in der Form

$$\varphi(x) = C_1(x) + C_2(x)e^{-4x}.$$

Das System (4.24) reduziert sich in diesem Fall auf

$$\begin{aligned} C_1'(x) + C_2'(x)e^{-4x} &= 0 \\ -4C_2'(x)e^{-4x} &= \cos 2x. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$C_2'(x) = -\frac{1}{4}e^{4x}\cos 2x \quad \text{und} \quad C_1'(x) = \frac{1}{4}\cos 2x.$$

Integration liefert

$$\begin{aligned} C_1(x) &= \frac{1}{8}\sin 2x, \\ C_2(x) &= -\frac{1}{4}\frac{4\cos 2x + 2\sin 2x}{20}e^{4x}, \end{aligned}$$

und damit ist eine Lösung der inhomogenen Gleichung gleich

$$\varphi(x) = C_1(x) + C_2(x)e^{-4x} = \frac{1}{10}\sin 2x - \frac{1}{20}\cos 2x.$$

■

2. Weg: Spezielle Ansätze bei speziellen rechten Seiten Für spezielle rechte Seiten kommt man schneller zum Ziel, wenn man einen geeigneten Lösungsansatz macht. Für $b(x) = e^{\mu x}$ ist es z.B. naheliegend, eine Lösung φ von $P(D)y = e^{\mu x}$ in der Form $\varphi(x) = ce^{\mu x}$ zu suchen. Nun ist nach Lemma 4.10(a)

$$P(D)e^{\mu x} = P(\mu)e^{\mu x}, \tag{4.25}$$

und wir sehen: Ist $P(\mu) \neq 0$, so ist tatsächlich

$$\varphi(x) = \frac{1}{P(\mu)}e^{\mu x}$$

eine Lösung von $P(D)y = e^{\lambda x}$.

Satz 4.12 *Sei $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$, und $f \in \mathbb{C}[X]$ sei ein Polynom vom Grad m. Die Zahl $\mu \in \mathbb{C}$ sei eine Nullstelle k. Ordnung von P. Dann besitzt die Differentialgleichung*

$$P(D)y = f(x)e^{\mu x}$$

eine Lösung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ der Gestalt

$$\varphi(x) = h(x)e^{\mu x},$$

wobei $h \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom vom Grad $m + k$ ist.

Beweis Nach Voraussetzung ist $P(D) = Q(D)(D - \mu I)^k$ mit $Q(\mu) \neq 0$. Außerdem sei an Lemma 4.10(b) erinnert: Ersetzen wir dort λ durch $-\lambda$ und anschließend $e_{-\lambda}f$ durch g, so folgt

$$(D - \lambda I)^k(e^{\lambda x}g(x)) = e^{\lambda x}g^{(k)}(x) \tag{4.26}$$

für jede k-mal differenzierbare Funktion g.
Wir zeigen nun die Behauptung durch vollständige Induktion nach m. Für $m = 0$ ist die Differentialgleichung

$$P(D)y = ce^{\mu x} \quad \text{mit } c \in \mathbb{C}$$

zu lösen. Eine spezielle Lösung ist

$$\varphi(x) := \frac{c}{k!Q(\mu)}x^k e^{\mu x},$$

denn wegen (4.26) und (4.25) ist

$$\begin{aligned} P(D)(x^k e^{\mu x}) &= Q(D)(D - \mu I)^k(x^k e^{\mu x}) = Q(D)((D^k x^k)e^{\mu x}) \\ &= Q(D)(k!e^{\mu x}) = k!Q(\mu)e^{\mu x}, \end{aligned}$$

und φ ist offenbar von der behaupteten Gestalt. Wir vollziehen nun den Induktionsschritt von $m - 1$ auf m. Wie oben erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned} P(D)(x^{k+m}e^{\mu x}) &= Q(D)(D - \mu I)^k(x^{k+m}e^{\mu x}) \\ &= Q(D)(D^k(x^{k+m}) \cdot e^{\mu x}) \\ &= \frac{(k+m)!}{m!}Q(D)(x^m e^{\mu x}) =: g(x)e^{\mu x}. \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass g ein Polynom vom Grad m ist. Dazu entwickelnd wir Q nach Potenzen von $x - \mu$:

$$Q(D) = \sum_{j=0}^{n-k} c_j(D - \mu I)^j.$$

Für $j = 0$ haben wir

$$c_j(D - \mu I)^j(x^m e^{\mu x}) = c_0 x^m e^{\mu x},$$

und $c_0 x^m$ ist ein Polynom vom Grad m, da $c_0 = Q(\mu) \neq 0$. Dagegen ist wegen (4.26) für $j > 0$

$$c_j(D - \mu I)^j(x^m e^{\mu x}) = c_j D^j(x^m)e^{\mu x},$$

und $c_j D^j(m)$ ist ein Polynom, dessen Grad kleiner als m ist. Es ist also g tatsächlich ein Polynom vom Grad m. Insbesondere gibt es eine Zahl d so, dass $f_1 := f - dg$ ein Polynom vom Grad kleiner als m ist. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es daher ein Polynom k_1 vom Grad $\leq m - 1 + k$ so, dass

$$P(D)(h_1(x)e^{\mu x}) = f_1(x)e^{\mu x}.$$

Wir definieren $h(x) := h_1(x) + dx^{m+k}$ und erhalten schließlich

$$P(D)(h(x)e^{\mu x}) = f_1(x)e^{\mu x} + dg(x)e^{\mu x} = f(x)e^{\mu x}.$$

∎

Beispiel G Wir suchen eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

$$(D^3 - 2D^2 - 2D + 2I)y = 2\sin x. \tag{4.27}$$

Wegen $2\sin x = \mathrm{Re}(-2ie^{ix})$ betrachten wir zunächst die Gleichung

$$P(D) = -2ie^{ix} \quad \text{mit } P(X) = X^3 - 2X^2 - 2X + 2.$$

Da $P(i) = i^3 - 2i^2 - 2i + 2 = 4 - 3i \neq 0$, hat diese Gleichung die spezielle Lösung

$$\psi(x) = \frac{-2i}{P(i)}e^{ix} = \frac{6-8i}{25}e^{ix}.$$

Da alle Koeffizienten von $P(D)$ reell sind, gilt

$$\mathrm{Re}(P(D)\psi(x) = P(D)\mathrm{Re}\psi(x).$$

Also hat (4.27) die spezielle Lösung

$$\varphi(x) := \mathrm{Re}\psi(x) = \frac{6}{25}\cos x + \frac{8}{25}\sin x.$$

■

Beispiel H Wir betrachten die Differentialgleichung

$$(D^3 + 2D^2 + D)y = x + 2e^{-x}.$$

Das charakteristische Polynom $P(X) = X^3 + 2X^2 + X = X(X+1)^2$ hat 0 als einfache und -1 als zweifache Nullstelle. Folglich bilden die Funktionen

$$\varphi_1(x) = 1, \quad \varphi_2(x) = e^{-x}, \quad \varphi_3(x) = xe^{-x}$$

ein Lösungsfundamentalsystem der homogenen Gleichung $P(D)y = 0$. Um die inhomogene Gleichung zu lösen, suchen wir spezielle Lösungen von

$$P(D)y = x = xe^{0\cdot x}, \tag{4.28}$$

$$P(D)y = 2e^{-x}. \tag{4.29}$$

Nach Satz 4.12 hat (4.28) eine spezielle Lösung der Gestalt $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$. Dann ist

$$P(D)f = (c_1 + 4c_2) + 2c_2x,$$

d.h. f löst (4.28) genau dann, wenn $2c_2 = x$ und $c_1 + 4c_2 = 0$, d.h. wenn $c_1 = -2$ und $c_2 = \frac{1}{2}$. Gleichung (4.29) hat nach Satz 4.12 eine spezielle Lösung der Gestalt $g(x) = (d_0 + d_1x + d_2x^2)e^{-x}$. Da e^{-x} und xe^{-x} bereits die homogene Gleichung lösen, erhalten wir

$$\begin{aligned} P(D)g &= P(D)(d_2x^2e^{-x}) = d_2D(D-I)^2(x^2e^{-x}) \\ &= d_2D(D^2(x^2)e^{-x}) = 2d_2D(e^{-x}) = -2d_2e^{-x}, \end{aligned}$$

so dass wir $d_2 = -1$ zu wählen haben. Eine spezielle Lösung der Ausgangsgleichung ist also

$$\psi(x) = -2x + \frac{1}{2}x^2 - x^2e^{-x}.$$

■

Beispiel I Die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = a \cos \omega t, \quad \omega_0, \omega \in (0, \infty),\ a \in \mathbb{R} \tag{4.30}$$

beschreibt die Bewegung eines harmonischen Oszillators der Eigenfrequenz ω_0 unter Wirkung einer periodischen äußeren Kraft $a \cos \omega t$. Wir betrachten zuerst wieder die komplexe Gleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = a e^{i\omega t}. \tag{4.31}$$

Dann ist $P(D) = D^2 + \omega_0^2 I = (D - i\omega_0 I)(D + i\omega_0 I)$, und wir unterscheiden 2 Fälle.

Fall 1: $\omega \neq \omega_0$ Dann erhalten wir eine Lösung von (4.31) durch den Ansatz

$$\psi(t) = c e^{i\omega t}.$$

Wegen $P(D)\psi = c(\omega_0^2 - \omega^2) e^{i\omega t}$ ist $\psi(t) = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2} e^{i\omega t}$ eine Lösung von (4.31) und somit

$$\varphi(t) = \mathrm{Re}\,\psi(t) = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t$$

eine Lösung der Ausgangsgleichung.

Fall 2: $\omega = \omega_0$ **(Resonanzfall)** Wegen $P(i\omega_0) = 0$ hat (4.31) in diesem Fall eine Lösung der Gestalt $\psi(t) = c t e^{i\omega_0 t}$. Einsetzen ergibt

$$P(D)(c t e^{i\omega_0 t}) = 2ic\omega_0 e^{i\omega_0 t}.$$

Also ist

$$\psi(t) = \frac{a}{2i\omega_0} t e^{i\omega_0 t}$$

eine Lösung von (4.31), und (4.30) besitzt die Lösung

$$\varphi(t) = \mathrm{Re}\left(\frac{a}{2i\omega_0} t e^{i\omega_0 t}\right) = \frac{a}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t.$$

Die Amplitude wächst also für $a \neq 0$ unbeschränkt. ■

Anmerkung 1 Die *Eulersche Differentialgleichung*

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = 0 \quad \text{auf } (0, \infty)$$

läßt sich durch die Substitution $z(t) := y(e^t)$ auf eine lineare Differentialgleichung n. Ordnung mit konstanten Koeffizienten zurückführen. Die Details und Beispiele sollen Sie sich in Übung/Tutorium ansehen. ■

Anmerkung 2 Man betrachtet auch Systeme linearer Differentialgleichungen von höherer Ordnung wie etwa

$$y'' - y + z'' - z' = e^x$$

$$y'' + y' + z'' = 0. \tag{4.32}$$

Dabei können neue Effekte auftreten. Z.B. hat das System (4.32) *keine* Lösung! Subtrahiert man nämlich die erste Gleichung von der zweiten, so folgt

$$y' + y + z' = -e^t,$$

und nach Differenzieren folgt

$$y'' + y' + z'' = -e^t,$$

was der zweiten Gleichung von (4.32) widerspricht. ■